УДК 539.3:624.046.3

Об оптимальном положении промежуточной опоры трехпролетного стержня

Бекшаев С.Я.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

Аннотация. *На примере трехпролетного шарнирно опертого по концам на абсолютно жесткие опоры продольно сжатого стержня рассматривается задача максимального повышения его критической силы за счет оптимального выбора положения одной из промежуточных опор при условии, что она является абсолютно жесткой, а вторая опора имеет конечную жесткость и фиксированное положение. Сжимающая сила предполагается постоянной по длине стержня, изгибная жесткость может меняться по произвольному закону Описаны условия, при которых решение этой задачи может быть приведено к решению другой задачи, в которой ищется максимум критической силы стержня за счет изменения его длины, при котором на одном из концов стержня присоединяется или удаляется некоторый участок с переносом соответствующей шарнирной опоры в конец вновь образованного стержня. Описаны качественные особенности форм потери устойчивости, отвечающих максимуму критической силы, в частности отсутствие изгиба крайнего пролета, примыкающего к перемещаемой опоре.*

Ключевые слова*: сжатый стержень, критическая сила, влияние длины, оптимизация, форма потери устойчивости, качественный признак*

Далее используются сокращения: (AB) – однопролетный стержень, шарнирно опертый концами A и B на абсолютно жесткие опоры; КрС – критическая сила; ФПУ – форма потери устойчивости; 2-я ФПУ – ФПУ, отвечающая второй по номеру в спектре КрС.

Одним из приемов повышения устойчивости многопролетных стержней является варьирование положения их промежуточных опор с целью повышения их КрС. Для ряда простых случаев установлено [1], что оптимальным положением внутренней опоры, обеспечивающим максимум основной КрС стержня, является узел 2-й ФПУ в спектре стержня с удаленной перемещаемой опорой. Однако, как показали недавние исследования [2, 3], при некоторых условиях, в частности, при конечной жесткости крайних опор, узел 2-й ФПУ, даже если он существует, не обеспечивает максимума КрС. В этих условиях поиск оптимального положения требует иного подхода и в некоторых случаях приводит к появлению особых полуизогнутых ФПУ, имеющих прямолинейные горизонтальные участки [2, 3]. Рассмотренные до сих пор случаи ограничивались стержнями с абсолютно жесткими внутренними опорами. В то же время на практике могут встретиться стержни с упругими внутренними опорами, оптимизация которых имеет свои особенности, и исследование этих особенностей представляет большой теоретический и практический интерес.

В настоящей работе ставится задача определения оптимального положения абсолютно жесткой внутренней опоры D трехпролетного стержня S (рис. 1, *а*), вторая внутренняя опора C которого имеет конечную жесткость и фиксированное положение. Под оптимальным

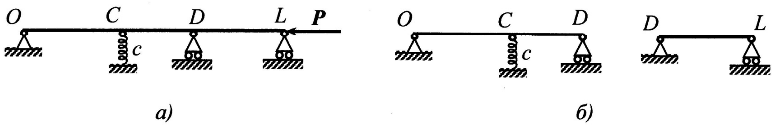


Рис. 1. Оптимизируемый стержень *S* (*а*) и его составные части (*б*)

понимается такое положение опоры, при котором КрС стержня S достигает максимального значения. Допускается произвольное распределение изгибной жесткости стержня по длине. Сжимающая сила во всех сечениях одинакова.

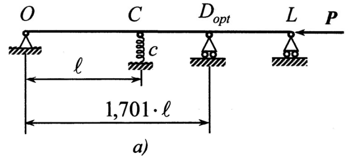
Если жесткость упругой опоры невелика и/или она расположена достаточно близко к одному из концов стержня, ее можно рассматривать как источник относительно малого возмущения двухпролетного стержня с жесткой внутренней опорой. В этом случае следует ожидать, что оптимальным положением этой опоры будет узел 2-й ФПУ стержня, в котором эта опора удалена.

В анонсируемой работе исследовался случай, в котором упругая опора обладает достаточно высокой жесткостью и расположена не слишком близко к концу стержня. Оптимальное положение опоры D разыскивалось на участке, содержащем узел 2-й ФПУ стержня (OL).

Проведенным исследованием установлено, что решение поставленной задачи связано с решением другой задачи оптимизации для **двухпролетного** стержня с упругой промежуточной опорой: перемещая крайнюю шарнирную опору (изменяя при этом длину стержня, присоединяя или удаляя его участок, примыкающий к перемещаемой опоре) найти такое ее положение, при котором КрС стержня достигнет максимума. Решению этой задачи и некоторых ее обобщений посвящены работы [4, 5]. Используя полученные в них результаты, предложен следующий прием, приводящий к искомому оптимальному положению опоры D.

Если ввести разрез на перемещаемой опоре D, образуется разрезной стержень S^*, спектр КрС которого состоит из спектров двухпролетного стержня OD и стержня (DL) (рис. 1 *б*). В [4] найдено значение $c_{\text{кр}}$ коэффициента жесткости такое, что при $c > c_{\text{кр}}$ КрС двухпролетного стержня OD достигает максимума $P_{\max}$ при некотором положении D_{opt} его правой опоры. При этом $P_{\max}>$ КрС (OC) и в сечении D_{opt} его ФПУ имеет нулевой наклон (горизонтальную касательную). Доказано, что описанное положение всегда существует на участке CL стержня S, если этот участок содержит узел 2-й ФПУ стержня (OL). $P_{\max}$ является КрС разрезного стержня S^*, которой отвечает гладкая ФПУ с прямолинейным горизонтальным участком DL. Устранение разреза не исказит эту форму и сохранит $P_{\max}$ вместе с отвечающей ей **полуизогнутой** ФПУ в спектре неразрезного трехпролетного стержня S. Удлинение или укорочение стержня S за счет участка DL не влияет на величину $P_{\max}$, однако, если $|DL|$ превосходит некоторое предельное значение $|DL|_{\text{пред}}$, $P_{\max}$ становится не основной, а одной из старших КрС стержня S. Дана качественная характеризация величины $|DL|_{\text{пред}}$, облегчающая ее определение.

Результаты иллюстрируются численным примером, в котором стержень S (рис. 2 *а*) имеет постоянную по длине изгибную жесткость, $EJ = \text{const.}$, $c_{\text{кр}} = 2\pi^2 EJ/\ell^3$, $c = 2c_{\text{кр}}$. Найдено оптимальное положение опоры D на расстоянии $1{,}701\cdot\ell$ от левого конца стержня. Соответствующее значение КрС равно $P_{\max} = 1{,}181\cdot P_E$, где $P_E = \pi^2 EJ/\ell^2$, а отвечающая ей ФПУ, вычисленная на основе точных выражений функций влияния сжатого призматического стержня, представлена на рис. 2 *б*, ординаты указаны в долях $\ell^3/\pi^3 EJ$, абсциссы – в долях ℓ.



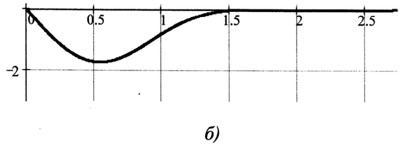


Рис. 2. Оптимальный призматический стержень *S* (*а*) и его основная ФПУ (*б*)

Эта форма сохраняет свой вид и остается основной, пока расстояние $|DL|$ не превзойдет рассчитанное значение $|DL|_{пред} = 1{,}036 \cdot \ell$.

Щодо оптимального положення проміжної опори трьохпролітного стрижня

Бекшаєв С.Я.

Анотація. *На прикладі трьохпролітного шарнірно опертого по кінцях на абсолютно жорсткі опори поздовжньо стисненого стержня розглядається задача максимального підвищення його критичної сили за рахунок оптимального вибору положення однієї з проміжних опор за умови, що вона є абсолютно жорсткою, а друга опора має кінцеву жорсткість і фіксоване положення. Стискаюча сила передбачається постійною по довжині стрижня, згинальна жорсткість може змінюватися за довільним законом. Описано умови, при яких розв'язання цієї задачі може бути приведено до розв'язання іншої задачі, в якій шукається максимум критичної сили стрижня за рахунок зміни його довжини, при якому на одному з кінців стрижня приєднується або видаляється деяка ділянка з перенесенням відповідної шарнірної опори в кінець новоутвореного стрижня. Описано якісні особливості форм втрати стійкості, що відповідають максимуму критичної сили, зокрема відсутність згину крайнього прольоту, що примикає до переміщуваної опори.*
Ключові слова*: стиснений стержень, критична сила, вплив довжини, оптимізація, форма втрати стійкості, якісна ознака*

On the optimal position of the intermediate support of a three-span rod

Bekshaev S. Ya.

Abstract. *Using the example of a three-span longitudinally compressed rod hinged at ends on absolutely rigid supports, the problem of maximizing its critical force by optimally selecting the position of one of the intermediate supports is considered, provided that it is absolutely rigid, and the second support has finite stiffness and a fixed position. The compressive force is assumed to be constant along the length of the rod, the flexural stiffness can vary according to an arbitrary law. Conditions are described under which the solution of this problem can be reduced to the solution of another problem in which the maximum of critical force of the rod is searched by changing its length, at which some part of the rod at one of the ends is joined or removed with the transfer of the corresponding hinge support to the end of the newly formed rod. Qualitative features of the buckling modes corresponding to the maximum of the critical force are described, in particular, the absence of bending of the end span adjacent to the movable support.*
Keywords*: compressed rod, critical force, influence of length, optimization, buckling mode, qualitative sign*

Список літератури

1. Нудельман Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем / Я.Л. Нудельман. – М.-Л., ГТТИ, 1949. – 176 с.
2. Бекшаев С.Я. Об оптимальном расположении промежуточной опоры продольно сжатого стержня / С.Я. Бекшаев // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2015. – Вип. №60. – С. 400 – 406.
3. Бекшаев С. Я. Полуизогнутые формы потери устойчивости в задаче оптимизации сжатого трехпролетного стержня / Бекшаев С. Я. // Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування. №2 (77). 2016. – С. 132 –139.
4. Бекшаев С.Я. Повышение устойчивости стержня за счет изменения длины / С.Я.Бекшаев // «World Science», № 6 (34), Vol. 2, Warsaw, Poland, June 2018, p. 12 – 16.
5. Бекшаев С.Я. О влиянии длины стержня на его критические силы / С.Я.Бекшаев // Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference «International Trends in Science and Technology», Vol. 1, November 30, 2018, Warsaw, Poland, p. 59 – 64.