

УДК 539.376

## Модель структурних змін та руйнування гладких циліндричних стрижнів при одновісному симетричному розтягу-стиску

Кобзар Ю.М.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, м. Київ, Україна

**Анотація.** Запропонована модель втоми, в основу якої покладено зменшення несучої маси речовини на пів циклової стиску та збільшення її щільності на пів циклової розтягу. Середнє напруження та об'ємна деформація зв'язані лінійною залежністю Гука. В залежності від початкових фізико-механічних властивостей стрижня, контролюються його структурні зміни, які кількісно відображають зміни маси, щільності, напружень, модуля пружності, обчислення яких відбувається на кожному циклі. Прийнято, що крихке руйнування стрижня відбувається в циклі, в якому не виконується нерівність початкової енергії руйнування та потенційної пружної енергії за помпованої на цьому циклі. Критерієм досягнення межі втоми є не виконання нерівності за межею прийнятої бази випробувань. Алгоритм моделі реалізовано в програмному середовищі комп'ютерної алгебри. Отримані розрахункові значення кривої Велера відрізняються від експериментальної кривої втоми жаростійкого сплаву, в допустимих межах. Однією з причин відмінності між кривими є зафіксована власна частота коливань стрижня, хоча насправді її треба перераховувати на кожному циклі.

**Ключові слова:** симетричний розтяг-стиск; модель втоми; межа втоми; енергетичний критерій руйнування при втомі.

Моделі багато циклової втоми, що прогнозують число циклів до руйнування в випадку симетричного навантаження, невідомі. В основному, явище втоми вивчається за умов, коли діють асиметричні навантаження [1, 2]. В даній роботі, запропонована модель багато циклової втоми стрижня під дією симетричного навантаження розтягу-стиску. В рамках моделі досліджується крихке руйнування матеріалів, коли змінюється несучий об'єм зразка і не враховуються малі зміни форми. Визначаються на кожному циклі структурні зміни, які спричиняють зміни маси, щільності, напруження, модуля пружності. Прийнято, що втомне руйнування стрижня відбувається на тому циклі, на якому не виконується нерівність, яка характеризує процес. Ця нерівність отримана з балансу енергій стрижня – за помпованої пружної та енергії яку викликає дія зовнішнього навантаження. Межа втоми досягається, коли перевищується умовна база випробувань без руйнувань. Ця модель є розвитком попереднього підходу в якому не враховувалась рівність енергій [3].

Нехай на ізотропний стрижень з коефіцієнтом Пуасона  $\mu$ , межею міцності  $\sigma_c$  і початковими – модулем пружності  $E_1$ , масою  $m_1$ , щільністю  $\rho_1$ , довжиною  $l_1$ , площею перетину  $F_1$ , діє симетричне періодичне розтяг-стискуєче навантаження  $P_j$ , з амплітудним значенням  $P_a = const$ . Напруження  $\sigma_j = P_j / F_1$  менше межі  $\sigma_{mj}$  пропорційності. Кількість циклів умовної бази випробувань -  $N_0 = 10 \cdot 10^6$ . Циклічні напруження

$$\sigma_j(i) = \sigma_{aj}(i) \sin \Omega t, \quad (1)$$

де  $\sigma_{aj}(i) = P_a / F_{aj}(i)$ ;  $F_{aj}(i)$  - амплітудне значення поперечного перетину стрижня, що виникають в стрижні з початковим об'ємом  $V_1 = m_1 / \rho_1$  викликають на кожному  $i$ -тому циклі стиск в першому  $j = 1$  та розтяг в другому  $j = 2$  пів циклах.

Початкова пружна енергія, що накопичується в стержні з амплітудою в одиниці об'єму  $W_1 = \sigma_{xal}^2 / 2E_1$  при розтягу-стиску буде

$$U = W_1 V_1 = \frac{\sigma_{xal}^2 m_1}{2E_1 \rho_1}. \quad (2)$$

Найбільша потенційна енергія  $U$ , що подається ззовні, дорівнює добутку амплітуди  $P_a$  прикладеної зовнішньої гармонічної сили з частотою  $\Omega$  на найбільше зміщення  $P_a/m_1\omega^2$ , де  $\omega$  початкова власна частота стрижня при співвідношенні  $\Omega \ll \omega$  між частотами, і рівна

$$U = \frac{P_a^2}{2m_1\omega^2}. \quad (3)$$

Ці енергії (2), (3) в моменти найбільших зміщень рівні між собою

$$U = \frac{P_a^2}{2m_1\omega^2} = \frac{\sigma_{xal}^2 m_1}{2E_1 \rho_1}. \quad (4)$$

З балансу енергій (4), знаходимо початкову власну частоту  $\omega = P_a \sqrt{E_1 \rho_1} / \sigma_{xal} m_1$  стрижня.

Прийнято, що зовнішнє амплітудне навантаження руйнування є  $P_n = \sigma_a m_1 \omega / \sqrt{E_1 \rho_1}$ , а енергія руйнування  $U_0 = P_n^2 / m_1 \omega^2$ . Критерієм крихкого руйнування є виконання нерівності

$$\frac{P_a^2}{m_1 \omega^2} - \frac{\sigma_{xaj}(i)^2 m_j(i)}{E_j(i) \rho_j(i)} < 0, \quad (5)$$

на  $i$ -тому циклі  $j$ -того пів циклу і цей цикл  $i = N_a < N_0$  є межею довготривалої міцності при початковій напрузі  $\sigma_1$  викликаний навантаженням  $P_a$ . Критерієм досягнення межі втоми є не виконання нерівності (5) для  $i \geq N_0$  за межею прийнятої бази випробувань  $N_0$ . Об'ємна деформація  $\varepsilon_{vj}(i)$  та поздовжня лінійна деформація  $\varepsilon_{xy}(i)$  повзучості зв'язані співвідношенням

$$\varepsilon_{vj}(i) = (1 - 2\mu)\varepsilon_{xy}(i). \quad (6)$$

Розглянемо рекурентний процес накопичення втоми на довільному  $i$ -тому циклі. В першому пів циклі  $j = 1$  при стисковій прийнято, що щільність не змінюється  $\rho_2(i-1) = \rho_1(i)$ , а для маси виконується

$$m_1(i-1) = m_2(i-1). \quad (7)$$

Стан стрижня на цьому і попередньому пів циклах зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_2(i-1)V_2(i-1)}{m_2(i-1)} = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_1(i)(V_2(i-1) - \Delta V_1(i))}{m_1(i)}. \quad (8)$$

З допомогою рівнянь (8) залежність між напруженнями  $\sigma_{xal}(i)$  та  $\sigma_{xa2}(i-1)$  буде

$$\sigma_{xal}(i) = \left( \frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left( 1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1), \quad (9)$$

де  $m_1(i)$  - невідома маса. Після серії перетворень, з допомогою рівнянь (8), залежності середнього напруження  $\sigma_{сеп1}(i)$  від лінійного напруження  $\sigma_{xa2}(i-1)$ , модуля пружності  $E_2(i-1)$ , об'ємного модуля  $K_2(i-1)$  та мас цього та попереднього циклу, будуть

$$\sigma_{сеп1}(i) = \frac{1}{3} \left( \left( 1 - \frac{4\mu G_2(i-1)}{E_2(i-1)} \right) \left( \frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left( 1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1) + 2\lambda_2(i-1) \left( 1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right) \right) \quad (10)$$

та

$$\sigma_{сеп1}(i) = K_2(i-1) \left( 1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right). \quad (11)$$

З рівнянь (10) та (11), шляхом виключення середнього напруження, отримано рівняння

$$E_2(i-1) \left( \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right)^2 - (E_2(i-1) + \sigma_{ха2}(i-1)) \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} + 2(1-\mu)\sigma_{ха2}(i-1) = 0. \quad (12)$$

З (12) знаходиться відношення мас  $m_1(i)/m_2(i-1)$ , яке дозволяє з залежності (9) визначити амплітудне напруження  $\sigma_{ха1}(i)$ . З балансу енергії

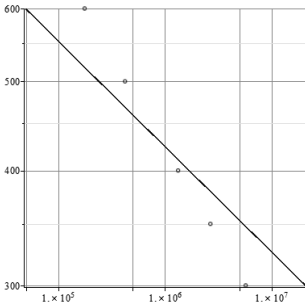
$$U = \frac{P_a^2}{m_1(i)\omega^2} = \frac{(\sigma_{ха1}(i))^2 m_1(i)}{E_1(i) \rho_j(i)}. \quad (13)$$

враховуючи (7) визначається новий модуль пружності  $E_1(i)$ . Знайдені на цьому пів циклі маса  $m_1(i)$ , напруження  $\sigma_{ха1}(i)$ , модуль пружності  $E_1(i)$  є початковими даними для наступного циклу. Перевіряється виконання нерівності (5), в разі виконання, руйнування відбулося і обчислення припиняються. В другому пів циклі  $j=1$  при розтягові прийнято, що маса не змінюється, тобто  $m_1(i) = m_2(i)$ , а для щільності виконується рівність

$$\rho_1(i) = \rho_2(i-1). \quad (14)$$

Стан стрижня на цьому та попередньому пів циклах зв'язують рівності аналогічні (8) з їх допомогою знаходиться залежність між напруженнями  $\sigma_{ха1}(i)$  та  $\sigma_{ха2}(i-1)$ , яка подібна до (9), в якій замість відношення мас стоїть відношення щільностей з  $\rho_2(i)$ - невідомою щільністю. Після серії перетворень, з допомогою рівнянь аналогічних (8), залежності середнього напруження  $\sigma_{сеп2}(i)$  від лінійного напруження  $\sigma_{ха1}(i)$ , модуля пружності  $E_1(i)$ , об'ємного модуля  $K_1(i)$  та щільності цього та попереднього циклу, будуть подібні до (10), (11), а після виключення з цих рівнянь середнього напруження отримуємо

$$2(1-\mu)\sigma_{ха1}(i) \left( \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \right)^2 - (E_1(i) + \sigma_{ха1}(i)) \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} + E_1(i) = 0. \quad (15)$$



З нього знаходиться відношення щільностей  $\rho_2(i)/\rho_2(i-1)$ , яке дозволяє визначити амплітудне напруження  $\sigma_{ха2}(i)$ . Знайдені на цьому пів циклі маса  $m_1(i)$ , напруження  $\sigma_{ха1}(i)$  є початковими даними для наступного циклу. Перевіряється виконання нерівності (5) в разі виконання, руйнування стрижня відбулося і обчислення припиняються. Апробація моделі відбулася на прикладі розрахунку кривої втоми стрижня при різних рівнях прикладених циклічних навантажень з частотою 30 *гц*. Стрижень має форму циліндричного прутика діаметром 7,5 *мм*, виготовлений з жаростійкого нікелевого сплаву ЭИ 867 [2]. Фізико-механічні

характеристики матеріалу стрижня наступні:  $\sigma_b = 1200 \text{ МПа}$ ,  $\mu = 0,294$ ,  $E_1 = 2,28 * 10^{11} \text{ МПа}$ ,  $m_1 = 0,151367625 \text{ кг}$ ,  $\rho_1 = 8570 \text{ кг/м}^3$ ,  $l_1 = 0,04 \text{ м}$ ,  $F_1 = 0,00004415625 \text{ м}^2$ . Розрахункові (пряма) та експериментальні (крапки) криві Велера приведені на рисунку. Вперше запропонована модель прогнозу руйнування від втоми, при симетричному циклічному

навантаженні, стрижня без його лабораторних випробовувань. Відмінності між результатами розрахунків та експериментальними даними цілком прийнятні для практики [4].

### **Model of structural changes and succession of sleeves of cylindrical strips in a simultaneous symmetric layer-stimulation**

**Ju.M.Kobzar**

*A model of fatigue is proposed, which is based on the reduction of the carrier mass of the substance for half cycle compression and increasing its density by half a cyclic stretch. The average voltage and volume deformation are related by Hooke's linear dependence. Depending on the initial physical and mechanical properties of the core, its structural changes are monitored, which quantitatively reflect changes in mass, density, stress, elastic modulus, the calculation of which occurs on each cycle. Depending on the accepted base of tests of the rod, the condition for its fragile destruction on a certain cycle is taken at the time of achieving the inequality derived from the balance of potential energies of elastic and caused by the action of external force. The criterion for reaching the fatigue limit is not to perform inequalities beyond the limits of the accepted test base. The algorithm of the model is implemented in the software environment of computer algebra. The obtained design values of the curve differ from the fatigue curve of this heat-stable alloy in the permissible limits. One of the reasons for the difference between the curves is the constant intrinsic frequency of the oscillation of the core, although in reality it must be recalculated in each cycle. Keywords: symmetric stretch-compression, fatigue model, fatigue limit, energy criterion of fracture at fatigue.*

### **Модель структурных изменений и разрушения гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении-сжатии**

**Кобзарь Ю.М.**

*Предложена модель усталости, в основе которой положено уменьшение несущей массы вещества на полу цикле сжатия и увеличение плотности на полу цикле растяжения. Среднее напряжение и объемная деформация связаны линейной зависимостью Гука. В зависимости от начальных физико-механических свойств стержня, контролируются его структурные изменения, которые количественно отображают изменения массы, плотности, напряжений, модуля упругости, которые вычисляются на каждом цикле. Принято, что хрупкое разрушение стержня происходит в цикле, в котором не выполняется неравенство начальной энергии разрушения и потенциальной упругой энергии накачанной в этом цикле. Критерием достижения предела усталости, есть не выполнение неравенства за пределами принятой базы испытаний. Алгоритм модели реализован в программной среде компьютерной алгебры. Полученные расчетные значения кривой Велера отличаются от экспериментальной кривой усталости жаропрочного сплава в допустимых пределах. Причиной отличия, между кривыми, возможно есть фиксированная собственная частота колебаний стержня, хотя ее необходимо перецифровать на каждом цикле. Ключевые слова: симметричное растяжение-сжатие; модель усталости; предел усталости; энергетический критерий разрушения в условиях усталости.*

### **Список літератури**

1. Хейвуд Р.Б. Проектирование с учетом усталости/Р.Б. Хейвуд Под ред. И.Ф.Образцова.- Москва: Машиностроение, 1969.- 504 с.
2. Голуб В.П., Погребняк А.Д. Высоко-температурное разрушение материалов при циклическом нагружении / В.П. Голуб, А.Д. Погребняк.- Киев: Наукова думка, 1994. – 228 с.
3. Кобзарь Ю.М., К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении-сжатии /Ю.М Кобзарь //Авиационно-космическая техника и технология.-2015.-№9(126).- С.6-14.
4. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени/В.П. Когаев. - Москва: Машиностроение,1977(Б-ка расчетчика).-232с.