УДК 539.376

Визначення параметрів ядер релаксації ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів

Павлюк[1] Я.В.
1-Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, м. Київ, Україна

Анотація. Розв'язується задача із визначення параметрів ядер релаксації ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Сформульовано залежності між ядрами повзучості, що задають зсувні та об'ємні в'язкопружні властивості ізотропного нелінійно-в'язкопружного середовища за умов складного напруженого стану та ядрами повздовжньої та зсувної повзучості, що побудовані для одновісного розтягу та чистого скручення. Визначальні рівняння в'язкопружності для складного напруженого стану обрано у вигляді суперпозиції рівняння для зсувів та рівняння об'ємного деформування. Нелінійність в'язкопружних властивостей матеріалів задається залежностями між інваріантами тензорів деформацій та напружень у формі рівнянь типу моделі Работнова. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку релаксації нормальних та дотичних напружень у тонкостінних трубчастих елементах із поліетилену високої щільності ПЭВП.
Ключові слова: релаксація; нелінійна-в'язкопружність; ядро спадковості; складний напружений стан;

Вступ. У спадкових теоріях в'язкопружності механічні властивості середовища задаються пружними сталими і ядрами спадковості, що включають ядра повзучості і ядра релаксації. Задача із ідентифікації ядер повзучості і релаксації, встановленні зв'язку між ядрами і визначення параметрів ядер складає одну з основних задач теорії в'язкопружності. Ідентифікація ядер спадковості і визначення параметрів ядер при складному напруженому стані є складною і зводиться, як правило, до встановлення залежності між ядрами спадковості при складному і одновісному напруженому стані.

В роботі задача ідентифікації ядер спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів при складному напруженому стані розв'язується шляхом формулювання співвідношень, що встановлюють залежність між ядрами повзучості при складному напруженому стані і одновісному напруженому стані в межах моделі в'язкопружності, побудованої на гіпотезі пропорційності девіаторів і на зданні нелінійності в'язкопружних властивостей у формі рівнянь типу рівнянь Работнова.

1.Постановка задачі. Розглядаються процеси повзучості і релаксації напружень ізотропних, однорідних, нестаріючих нелінійно-в'язкопружних матеріалів при складному напруженому стані. Визначальні рівняння повзучості, що задають залежність між компонентами тензора деформацій ε_{ij}, тензора напружень σ_{ij} і часом t при постійній температурі записуються у вигляді:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t);t)}{\sigma_i(t)}\left(\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)\right), \qquad \left(i, j = \overline{1,3}\right), \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) = \sigma_i(t) + \lambda_i \int\limits_0^t K_i(t-\tau)\sigma_i(\tau)d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \lambda_v \int\limits_0^t K_v(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau, \end{cases} \tag{1.1}$$

розв'язком яких є рівняння релаксації

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t)-\delta_{ij}\sigma_0(t)=\dfrac{2}{3}\dfrac{\sigma_i(\varepsilon_i(t);t)}{\varepsilon_i(t)}\cdot\left(\varepsilon_{ij}(t)-\dfrac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t)\right); \qquad (i,j=\overline{1,3}); \\ \sigma_i(t)=\varphi_i(\varepsilon_i(t))-\lambda_i\int\limits_0^t R_i(t-\tau)\varphi_i(\varepsilon_i(\tau))d\tau; \\ \sigma_0(t)=\varphi_v(\varepsilon_v(t))-\lambda_v\int\limits_0^t R_v(t-\tau)\varphi_v(\varepsilon_v(\tau))d\tau. \end{cases} \tag{1.2}$$

Тут $\varepsilon_v(\cdot)$ і $\varepsilon_i(\cdot)$ – об'ємна деформація і інтенсивність тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$; $\sigma_0(t)$ – середнє напруження, $\sigma_i(t)$ – інтенсивність напружень; $\varphi_i(\varepsilon_i(t))$, $\varphi_v(\varepsilon_v(t))$ – функції, що задають нелінійність скалярних властивостей і їх обернення $\psi_i(\cdot)$ і $\psi_v(\cdot)$ відповідно; $K_i(t-\tau)$, $K_v(t-\tau)$ і $R_i(t-\tau)$, $R_v(t-\tau)$ – ядра нелінійної повзучості і релаксації відповідно; λ_i, λ_v – реологічні параметри; δ_{ij} – дельта-функція Кронекера.

Ядра повзучості $K_i(t-\tau)$ и $K_v(t-\tau)$ в (1) і релаксації $R_i(t-\tau)$ і $R_v(t-\tau)$ в (1.2) задаються відповідно співвідношеннями

$$\begin{gathered} K(t-\tau)=\frac{1}{(t-\tau)^a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n(t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}; \\ R(t-\tau)=\frac{1}{(t-\tau)^a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+\beta)^n(t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}, \end{gathered} \tag{1.3}$$

де α, β, λ – параметри ядер, що визначаються експериментально; Г(·) – гамма-функція Эйлера.

Між ядрами повзучості і релаксації існує інтегральний зв'язок:

$$R(t)-K(t)=\lambda\int\limits_0^t K(t-\tau)R(\tau)d\tau \tag{1.4}$$

Ідентифікація ядер релаксації в (1.2) здійснюється на основі групи базових дослідів на повзучість при постійних напруженнях. Група базових експериментів включає випробування на повзучість суцільних циліндричних зразків при одновісному розтягу із заміром поздовжніх і поперечних деформацій.

Для завдання табличних експериментальних данних в аналітичному вигляді використовуються згладжуючі кубічні сплайни [1].

Задача полягає у встановленні залежності між ядрами повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів при складному і одновісному напружених станах, у визначенні параметрів ядер релаксації і в експериментальній апробації сформульованих співвідношень на задачах релаксації напружень утонкостінних трубчасти елементах із полімерних матеріалів при комбінованому навантаженні розтягом і крученням.

2. Ідентифікація ядер спадковості при складному напруженому стані.

Для встановлення залежності між ядрами повзучості $K_i(\cdot)$, $K_v(\cdot)$ і ядрами повзучості $K_{11}(\cdot)$, $K_{22}(\cdot)$ розв'яжемо рівняння (1.1) відносно $\varepsilon_i(t)$, $\varepsilon_v(t)$ і відповідно відносно $\varepsilon_{11}(t)$, $\varepsilon_{22}(t)$. Скориставшись далі модифікованим принципом суперпозиції за умови, що величини $\sigma_i(t)=const$ и $\sigma_0(t)=const$ отримаємо залежності між ядрами повзучості $K_i(t)$, $K_v(t)$, $K_{11}(t)$, $K_{22}(t)$.

Розв'язок системи рівнянь дозволяє встановити залежність між ядрами повзучості $K_i(t)$, $K_v(t)$ в (1.1) і $K_{11}(t)$, $K_{22}(t)$ у вигляді

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{2}{3}\frac{\psi_{11}(\sigma_{11})\lambda_{11}K_{11}(t) + \psi_{22}(\sigma_{11})\lambda_{22}K_{22}(t)}{\psi_i(\sigma_{11})} \qquad (2.1)$$

І відповідно у вигляді

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\psi_{11}(\sigma_{11})\lambda_{11}K_{11}(t) - 2\psi_{22}(\sigma_{11})\lambda_{22}K_{22}(t)}{\psi_v\left(\frac{1}{3}\sigma_{11}\right)}. \qquad (2.2)$$

Котрі дозволяють розраховувати дискретні значення скалярних ядер повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів при складному напруженому стані, використовуючи значення ядер поздовжньої і поперечної повзучості при одновісному розтягу.

3. Ідентифікація параметрів ядер повзучості. Параметри ядер інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t-\tau)$ і $K_v(t-\tau)$ об'ємної повзучості в (1.1) визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер, розрахованих за співвідношеннями (2.1) і (2.2) дробово-експоненційними функціями (1.3). Методика визначення параметрів ядер $K_{11}(t-\tau)$ і $K_{22}(t-\tau)$ нелінійно-в'язкопружних матеріалів викладена в [1]. Параметри ядер визначаються виходячи із умови подібності миттєвих діаграм деформування і ізохронних діаграм повзучості. В таблиці 1 наведені значення параметрів ядер спадковості поліетилену ПЭВП. Експериментальні дані запозичені із літератури [2].

Таблиця 1

Значення параметрів ядер спадковості для ПЭВП

$K_{11}(t)$, год$^{-1}$			$K_{22}(t)$, год$^{-1}$			$K_i(t)$, год$^{-1}$			$K_v(t)$, год$^{-1}$		
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{22}	β_{22}	λ_{22}	α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v
-0,1681	5,4039	4,5723	-0,2720	3,9906	3,6874	-0,1988	4,9293	4,2870	-0,0574	8,3649	8,0242

4. Розрахунок релаксації нормальних напружень. Розраховується зменшення у часі розтягуючих напружень $\sigma_{11}(t)$ в тонкостінних трубчастих елементах із поліетилену ПЭВП при одновісному деформуванні видовженнями $\varepsilon_{11} = const$ $(\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 0)$ і комбінованому деформуванні видовженнями $\varepsilon_{11} = const$ і зсувами $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = const$.

Для розрахунку релаксації нормальних напружень $\sigma_{11}(t)$ із системи рівнянь (1.2) і (1.3) при $\varepsilon_{11} = const$ і $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 0$ отримуємо рівняння

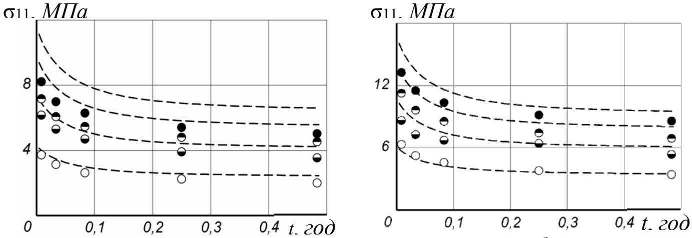
$$\begin{aligned}\sigma_{11}(t) = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{3} f_{k,j}\left[\frac{2(1+\nu)}{3}\varepsilon_{11}\right]^k \cdot \left[1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(\lambda_i+\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma\left[1+(1+n)(1+\alpha_i)\right]}\right] + \\ + \sum_{m=0}^{3} k_{m,j}\left[(1-2\nu)\varepsilon_{11}\right]^m \cdot \left[1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(\lambda_v+\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma\left[1+(1+n)(1+\alpha_v)\right]}\right],\end{aligned} \qquad (4.1)$$

а при $\varepsilon_{11} = const$ і $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = const$ – рівняння

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(t) = \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)}{\sqrt{\left[(1+\nu)\varepsilon_{11}\right]^2 + 3\varepsilon_{21}^2}}\sum_{k=0}^{3} f_{k,j}\left[\frac{2}{3}\sqrt{\left[(1+\nu)\varepsilon_{11}\right]^2 + 3\varepsilon_{21}^2}\right]^k \times \\ \times\left[1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(\lambda_i+\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma\left[1+(1+n)(1+\alpha_i)\right]}\right] + \sum_{m=0}^{3} k_{m,j}\left[(1-2\nu)\varepsilon_{11}\right]^m \times \left[1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(\lambda_v+\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma\left[1+(1+n)(1+\alpha_v)\right]}\right].\end{aligned} \qquad (4.2)$$

Де $f_{k,j}$ і $k_{m,j}$ – коефіцієнти згладжуючих кубічних сплайнів функцій $\varphi_i(\cdot)$ і $\varphi_v(\cdot)$, що мають розмірність напружень і залежать від j-го інтервалу розбиття.

Результати розрахунку релаксації нормальних напружень $\sigma_{11}(t)$ в тонкостінних трубчастих елементах із поліетилену високої щільності ПЭВП, виконаних по рівняннях (3.1) і (3.2) із використанням приведених у таблиці 1 значень матеріальних констант, співставлені на рис.1 із експериментальними даними при одновісному розтягу (а) і комбінованому навантаженні



а б

Рис. 1 Релаксація нормальних напружень

крученням (б). При одновісному розтягу фіксувалось значення видовжень ε_{11}= 1,0 (○); 2,0 (◒);3,0(◓); 4,0(●)%, а при комбінованому навантаженні розтягом із крученням фіксувалось значення видовжень ε_{11} і зсувів ε_{21} : 0,71 і 0,61 (○); 1,41 і 1,22 (◒); 2,12 і 2,84 (◓); 2,83 і 2,45 (●) %. Як видно із мал. 1 отримано задовільне узгодження результатів розрахунку із експериментами.

Determination parameters of relaxation kernels of isotropic nonlinear viscoelastic materials under the complex stress states

PavlyukY.V.

The determination parameters of relaxation kernels of isotropic nonlinear viscoelastic materials under the complex stress states is considered. The relationship between the heredity kernels of isotropic nonlinear viscoelastic materials under the complex and one-dimensional stress states is determined. The constitutive equations are chosen as to meet the hypothesis of the deviators proportionality. The nonlinearity of viscoelastic properties is given in the form of Rabotnov's equations type. The creep and relaxation kernels are given by the fractional-exponential functions. The solutions are approved experimentally for the problems of the computation of tangential stresses relaxation in thin-walled elements made of high-density polyethylene.
Keywords: relaxation; nonlinear viscoelastic; the heredity kernels; complex stress states;

Определение параметров ядер релаксации изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии.

Павлюк Я.В.

***Аннотация**. Решается задача по определению параметров ядер релаксации изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов в условиях сложного напряженного состояния. Установлена зависимость между ядрами наследственности, задающими скалярные свойства изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии, и ядрами ползучести, полученными при одноосном растяжении и чистом кручении. Определяющие уравнения выбраны в форме, соответствующей гипотезе пропорциональности девиаторов. Нелинейность вязкоупругих свойств задается зависимостями между инвариантами тензоров деформаций и напряжений в форме уравнений типа модели Работнова. Решения апробированы экспериментально на задачах расчета релаксации нормальных и касательных напряжений в тонкостенных трубчатых элементах из полиэтилена высокой плотности ПЭВП.*
Ключевые слова: релаксація; нелинейная вязкоупругость; ядро наследственности; сложное напряженное состояние;

Список літератури

1. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости. / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, В.С. Рагулина // Прикл. механика. – 2011. – Том 47, №3. – сс. 75-88.
2. Крегерс А.Ф., Килевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С. 195-201.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).