УДК 531

Не розв'язані задачі в механіці з використанням векторів

Харченко Є.М.
м. Запоріжжя, Україна

Анотація. *Задачі з механіки (статика, кінематика) і опору матеріалів, які раніше не можна було вирішити за допомогою теорії векторів. Приклади розв'язання цих задач. Основні проблеми та зміни в теорії векторів.*
<u>Ключові слова:</u> теорія векторів; зворотній вектор; кутовий вектор

При вивченні теоретичної механіки [1], [2], виникає питання - чому кутові фізичні величини (крутний момент, кутова швидкість, кутове прискорення, ..) описуються за допомогою (прямолінійних) векторів, адже ці вектори опосередковано вказують на напрям кутових фізичних величин, і таким чином ці величини описуються псевдовекторами.

Для розуміння узгодженості напрямків псевдовектори і кутових фізичних величин ми користуємося правилом свердлика, і на це правило нам необхідно додатково витрачати свою увагу.

Чи можна замінити або взагалі відмовитися від використання неофіційного правила свердлика? Адже це правило накладає відразу декілька обмежень: на кутові фізичні величин та системи координат. Потрібно перевірити обрану систему координат чи вона права (правило свердлика розділяє і обмежує вибір систем координат), і позитивний кутовий напрямок може бути тільки проти годинникової стрілки.

Відсутність в теорії векторів «векторного поділу» не дозволяє вирішувати такі завдання як: знаходження сили або важеля з крутного моменту, знаходження кутової швидкості або радіусу з дотичній швидкості, і інші завдання з векторними величинами, де можливий алгебраїчний поділ (якщо ці фізичні величини представлені в загальному вигляді).

$$\begin{array}{lll} h \cdot F = M & r \cdot w = v_\tau & r \cdot \varepsilon = a_\tau \\ \overline{h} \times \overline{F} = \widehat{M} & \overline{r} \times \widehat{w} = \overline{v}_\tau & \overline{r} \times \widehat{\varepsilon} = \overline{a}_\tau \\ \overline{h} = \widehat{M} \times \dfrac{1}{\overline{\overline{F}}} & \overline{r} = \overline{v}_\tau \times \dfrac{1}{\widehat{\widehat{w}}} & \widehat{\varepsilon} = \dfrac{1}{\overline{\overline{r}}} \times \overline{a}_\tau \\ \overline{F} = \dfrac{1}{\overline{\overline{h}}} \times \widehat{M} & \widehat{w} = \dfrac{1}{\overline{\overline{r}}} \times \overline{v}_\tau & \overline{r} = \overline{a}_\tau \times \dfrac{1}{\widehat{\widehat{\varepsilon}}} \end{array} \tag{1}$$

Знаходження цих фізичних величин в координатно-векторному вигляді диктується необхідністю в створенні віртуальних програм, потребою повноцінно представляти фізичні величини, як вектори в тривимірному просторі. Автоматизації в рішенні однотипових завдань, без необхідності в ручному коригуванні або перевірці.

Всі ці проблеми показують про нездатність існуючої теорії векторів підходити для повноцінного моделювання в теоретичній механіці і вирішенні її ряду прикладних задач. Таким чином, з'являється необхідність в зміні і доповненні теорії векторів. Це завдання було успішно вирішене в роботі «Кутові вектори в теорії векторів» [3].

Подальший розгляд прикладів вимагає ознайомлення з основними змінами в теорії векторів.

Кутовий вектор являє собою площу паралелограма або прямокутника на площині, у якого є напрям у вигляді спрямованої стрілки. Цей вектор не може проектуватися на координатні осі, так як втрачаються напрямки проекцій, тому його проекції знаходяться на координатних площинах $\widehat{a}(a_{xy}, a_{yz}, a_{zx})$.

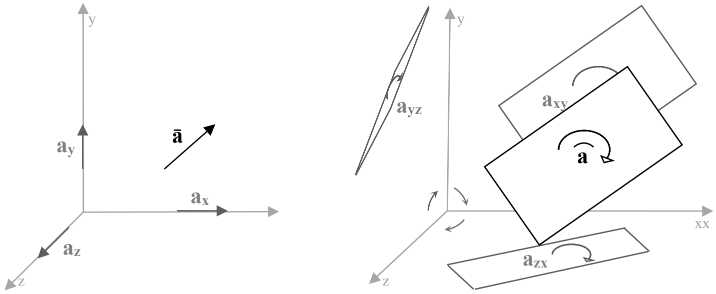

Рис.1– Представлення прямолінійного і кутового векторів та їх проекцій в прямокутній системі координат.

Зворотний вектор, це такий же повноцінний вектор, як і оригінальний вектор. Він володіє модулем і напрямком. Напрямок зворотнього вектора збігається з напрямком оригінального вектора, а модуль має зворотну залежність.

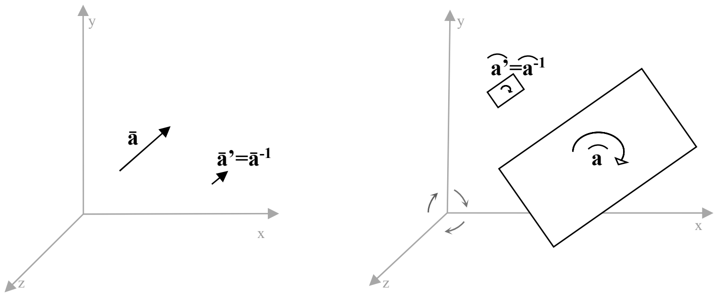

Рис.2– Представлення зворотних прямолінійного та кутового векторів

При вирішенні рівнянь векторних добутків, в яких присутній зворотний вектор, останній замінюється повноцінним вектором, з таким же модулем і напрямком як у зворотного вектора. Таким чином, як такого векторного поділу немає, і цю операцію слід називати векторним добутком на зворотний вектор, але при цьому дана операція аналогічна алгебраическому поділу.

Ще одною значущою зміною в теорії векторів, є зміна рівняння перехресного (векторного) добутка векторів. В роботі [3] представлені два простих докази, що рівняння $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c}$ не може бути частиною теорії векторів, так як воно не узгоджується з властивістю додавання векторів і є логічно не спроможним.

При цьому представлені аргументи того що результатом перехресного (векторного) добутка прямолінійних векторів є кутовий вектор $\overline{a} \times \overline{b} = \widehat{c}$.

Дане рівняння повноцінно підходить для методологічного опису утворення всіх кутових фізичних величин (в механіці).

Розглянемо, як вплинули зміни в теорії векторів на прикладі вирішення задач.

Завдання 1. Розглянемо задачу по знаходженню сили з крутного моменту в координатно-векторному вигляді [3, стор.84].

Припустимо, що в системі координат з позитивним кутовим напрямком $OX \to OY \to OZ$ крутний момент знаходиться із рівняння $\overline{h} \times \overline{F} = \widehat{M}$, тоді $\overline{F} = \frac{1}{\overline{h}} \times \widehat{M}$.

В даному рівнянні присутній змішаний перехресний добуток векторів.

Подібні рівняння виводяться із рівняння $\overline{a} \times \overline{b} = \widehat{c}$ (2)

Для позитивного кутового напрямку $OY \to OX \to OZ$

$$\overline{a} = \frac{1}{\overline{b}} \times \widehat{c} \tag{3}$$

$$\overline{b} = \widehat{c} \times \frac{1}{\overline{a}} \tag{4}$$

Для позитивного кутового напрямку $OX \to OY \to OZ$

$$\overline{a} = \widehat{c} \times \frac{1}{\overline{b}} \tag{5}$$

$$\overline{b} = \frac{1}{\overline{a}} \times \widehat{c} \tag{6}$$

У всіх змішаних добутків векторів кутовий вектор бере участь в цьому добутку, і для нього можна спостерігати залежність: *кутовий вектор змінюється в змішаному перехресному добутку векторів (3), (4) і (5), (6).* Якщо цього не відбувається, знаходжувальні прямолінійні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ будуть однаковими.

Повернемося до нашого завдання. Для даного рівняння (з позитивним кутовим напрямком $OX \to OY \to OZ$), базисні вектори мають залежність:

$$\overline{i} \times \widehat{l} = \overline{j}\,,\ \overline{j} \times \widehat{m} = \overline{k}\,,\ \overline{k} \times \widehat{n} = \overline{i}\,,\ \overline{j} \times \widehat{l} = -\overline{i}\,,\ \overline{k} \times \widehat{m} = -\overline{j}\,,\ \overline{i} \times \widehat{n} = -\overline{k}$$

$$\begin{aligned}
\overline{F} &= \frac{1}{\overline{h}} \times \widehat{M} = \overline{h}' \times \widehat{M} = \left(h'_x\,\overline{i} + h'_y\,\overline{j} + h'_z\,\overline{k}\right) \times \left(M_{xy}\widehat{l} + M_{yz}\widehat{m} + M_{zx}\widehat{n}\right) = \\
&= h'_x M_{xy}\left(\overline{i} \times \widehat{l}\right) + h'_x M_{yz}\left(\overline{i} \times \widehat{m}\right) + h'_x M_{zx}\left(\overline{i} \times \widehat{n}\right) + h'_y M_{xy}\left(\overline{j} \times \widehat{l}\right) + h'_y M_{yz}\left(\overline{j} \times \widehat{m}\right) + \\
&+ h'_y M_{zx}\left(\overline{j} \times \widehat{n}\right) + h'_z M_{xy}\left(\overline{k} \times \widehat{l}\right) + h'_z M_{yz}\left(\overline{k} \times \widehat{m}\right) + h'_z M_{zx}\left(\overline{k} \times \widehat{n}\right) = \\
&= \left(h'_z M_{zx} - h'_y M_{xy}\right)\overline{i} + \left(h'_x M_{xy} - h'_z M_{yz}\right)\overline{j} + \left(h'_y M_{yz} - h'_x M_{zx}\right)\overline{k} = \\
&= \left(\frac{h_z M_{zx} - h_y M_{xy}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}\right)\overline{i} + \left(\frac{h_x M_{xy} - h_z M_{yz}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}\right)\overline{j} + \left(\frac{h_y M_{yz} - h_x M_{zx}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}\right)\overline{k} = \\
&= F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}
\end{aligned}$$

Відповідь: $$F_x = \frac{h_z M_{zx} - h_y M_{xy}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2},\ F_y = \frac{h_x M_{xy} - h_z M_{yz}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2},\ F_z = \frac{h_y M_{yz} - h_x M_{zx}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \tag{7}$$

Завдання 2. Розглянемо задачу по знаходженню важеля з крутного моменту в координатно-векторному вигляді з позитивним кутовим напрямком $OX \to OY \to OZ$

$$\widehat{l} \times \overline{i} = -\overline{j}\,,\ \widehat{m} \times \overline{j} = -\overline{k}\,,\ \widehat{n} \times \overline{k} = -\overline{i}\,, \widehat{l} \times \overline{j} = \overline{i}\,,\ \widehat{m} \times \overline{k} = \overline{j}\,,\ \widehat{n} \times \overline{i} = \overline{k}$$

$$\bar{h} = \widehat{M} \times \frac{1}{\bar{F}} = \widehat{M} \times \bar{F}' = \left(M_{xy}\hat{l} + M_{yz}\widehat{m} + M_{zx}\hat{n}\right) \times \left(F'_x\,\bar{i} + F'_y\,\bar{j} + F'_z\,\bar{k}\right) =$$
$$= F'_x\,M_{xy}\left(\hat{l} \times \bar{i}\right) + F'_x\,M_{yz}\left(\widehat{m} \times \bar{i}\right) + F'_x\,M_{zx}\left(\hat{n} \times \bar{i}\right) + F'_y\,M_{xy}\left(\hat{l} \times \bar{j}\right) + F'_y\,M_{yz}\left(\widehat{m} \times \bar{j}\right) +$$
$$+ F'_y\,M_{zx}\left(\hat{n} \times \bar{j}\right) + F'_z\,M_{xy}\left(\hat{l} \times \bar{k}\right) + F'_z\,M_{yz}\left(\widehat{m} \times \bar{k}\right) + F'_z\,M_{zx}\left(\hat{n} \times \bar{k}\right) =$$
$$= \left(F'_y\,M_{xy} - F'_z\,M_{zx}\right)\bar{i} + \left(F'_z\,M_{yz} - F'_x\,M_{xy}\right)\bar{j} + \left(F'_x\,M_{zx} - F'_y\,M_{yz}\right)\bar{k} =$$
$$= \left(\frac{F_y M_{xy} - F_z M_{zx}}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{F_z M_{yz} - F_x M_{xy}}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\right)\bar{j} + \left(\frac{F_x M_{zx} - F_y M_{yz}}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\right)\bar{k} =$$
$$= F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$$

Відповідь: $h_x = \dfrac{F_y M_{xy} - F_z M_{zx}}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, $h_y = \dfrac{F_z M_{yz} - F_x M_{xy}}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, $h_z = \dfrac{F_x M_{zx} - F_y M_{yz}}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ (8)

Висновок

Потреба у вирішенні завдань з теоретичної механіки призвела до зміни і доповнення теорії векторів. Основні з цих змін описані в статті «Кутові вектори в теорії векторів». Ці зміни виявилися настільки значущі, що змінять методологію викладу кутових фізичних величин в декількох розділах теоретичної механіки: статики і кінематики.

Кутові фізичні величини стало можливо повноцінно моделювати за допомогою кутових векторів. Ці вектори дозволили відмовитися від правила свердлика. В результаті, в системі координат з'явився кутовий напрямок, і значно розширився вибір прямокутних систем координат (їх не потрібно ділити на праві і ліві, позитивний кутовий напрямок може бути як по годинникової стрілки, так і проти годинникової стрілки).

Поява зворотних векторів дозволило вирішувати завдання векторного добутку на зворотний вектор (аналог алгебраїчного поділу фізичних величин, представлених в загальному вигляді). Це дозволило отримувати як прямолінійні, так і кутові фізичні величини в координатно-векторному вигляді, які раніше не вдавалося отримати.

Всі ці зміни повноцінно задовольняють потребу в створенні віртуальних програм. І виключають появи помилок в напрямках векторів при вирішенні завдань.

Unresolved problems in mechanics using vectors

Kharchenko Yevhen

Abstract. *Problems in mechanics (statics, kinematics) and the resistance of materials that could not be solved before using the theory of vectors. Examples of solving these problems. The main problems and changes in the theory of vectors.*

Keywords: *theory of vectors; inverse vector; angular vector*

Нерешенные задачи в механике с использованием векторов

Харченко Е.Н.

Аннотация. *Задачи по механике (статика, кинематика) и сопротивлению материалов, которые раньше нельзя было решить с помощью теории векторов. Примеры решения этих задач. Основные проблемы и изменения в теории векторов.*

Ключевые слова: *теория векторов; обратный вектор; угловой вектор*

Список літератури:

1. Курс теоретической механики: учебник для вузов / Дронг В. И., Дубинин В. В., Ильин М. М. [и др.]; ред. Колесников К. С., Дубинин В. В. - 5-е изд., испр. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 580 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. 5 издание. — М.: Высшая школа, 1990. — 607 с.
3. Kharchenko, Y. M. (2017). Angular Vectors in the Theory of Vectors. Journal of Mathematics Research, 9(5), 71. https://doi.org/10.5539/jmr.v9n5p71