# СЕКЦІЯ Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла

УДК 539.3

## Векторна форма методу скінченних елементів для моделювання напружено-деформованого стану тонких оболонок

**Сторожук Є.А., Чернишенко І.С., Корнієнко В.Ф.**
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

***Анотація:*** *Дано постановку крайових задач для тонких оболонок складної форми при дії статичного навантаження. Вихідними є рівняння теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа–Лява. Геометричні співвідношення записані в векторній формі, а фізичні – на основі закону Гука для ізотропних матеріалів. З використанням методу скінченних елементів розроблено методику чисельного розв'язання двовимірних задач статики для тонких оболонок складної геометрії. Розв'язувальні рівняння в переміщеннях отримані з умов стаціонарності дискретного аналога функціоналу Лагранжа. Запропоновано варіант сумісних скінченних елементів з 36 ступенями свободи. Особливість розробленої модифікації методу скінченних елементів полягає в векторній апроксимації шуканих величин і дискретному виконанні геометричної частини гіпотез Кірхгофа–Лява. Побудований таким чином скінченний елемент для тонких оболонок складної форми задовольняє умовам неперервності векторів переміщень і кутів повороту та точно описує поступальну частину переміщення скінченного елемента як жорсткого тіла.*
Ключові слова: *оболонки складної форми; статичне навантаження; метод скінченних елементів; векторна апроксимація; дискретні гіпотези Кірхгофа–Лява.*

Розглянемо тонку оболонку товщини $h$, виготовлену з однорідного ізотропного матеріалу і навантажену поверхневими та крайовими силами. Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$. Вважаємо, що область зміни координат параметризації $\alpha_1, \alpha_2$ серединної поверхні $\Sigma$ є складною, в якій не всі контурні лінії збігаються з координатними.

Геометричні співвідношення представимо у векторній формі згідно теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа–Лява [1, 2]:

$$\varepsilon_{11} = \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_{22} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad \varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2 = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2};$$

$$\mu_{11} = -\vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \mu_{22} = -\vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad 2\mu_{12} = -\vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_1 \partial \alpha_1} - \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \tag{1}$$

де $A_1, A_2$ – параметри Ламе; $\vec{u} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ – орти системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$; $\vec{\phi} = \phi_1 \vec{e}_1 + \phi_2 \vec{e}_2$ – вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній: $\phi_1 = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}$; $\phi_2 = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2}$.

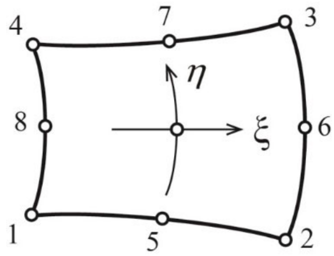
Зв'язок внутрішніх зусиль і моментів з компонентами деформації подамо на основі співвідношень закону Гука [1, 2]:

$$T_{11}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}\right);\quad T_{22}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}\right);\quad T_{12}=Gh\varepsilon_{12}\,;$$

$$M_{11}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\mu_{11}+\nu\mu_{22}\right);\quad M_{22}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\mu_{22}+\nu\mu_{11}\right);\quad M_{12}=\frac{Gh^3}{6}\mu_{12}\,, \tag{2}$$

де $E,G,\nu$ – модулі Юнга, зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки.

Сформульовану вище крайову задачу для тонкої оболонки при статичному навантаженні розв'яжемо методом скінченних елементів (МСЕ). Розглянемо восьмивузловий криволінійний чотирикутний скінченний елемент (СЕ), сторони якого можуть не збігатися з координатними лініями $\alpha_1,\alpha_2$.




Глобальні криволінійні координати $\alpha_1,\alpha_2$ довільної точки СЕ визначаємо через їх вузлові значення $\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)}$ з використанням біквадратичних функцій локальних координат ($-1\le\xi,\eta\le 1$):

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{8}\Phi^{(i)}\left(\xi,\eta\right)\alpha_j^{(i)}\,,\ (j=1,2) \tag{3}$$

де $\Phi^{(i)}\left(\xi,\eta\right)=\frac{1}{4}\left[\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1+\eta\eta_i\right)-\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1-\eta^2\right)-\left(1+\eta\eta_i\right)\left(1-\xi^2\right)\right]$ для $i=1,2,3,4$;

$$\Phi^{(i)}\left(\xi,\eta\right)=\frac{1}{2}\left(1+\eta\eta_i\right)\left(1-\xi^2\right) \text{ для } i=5,7\,;\ \Phi^{(i)}\left(\xi,\eta\right)=\frac{1}{2}\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1-\eta^2\right) \text{ для } i=6,8\,.$$

Апроксимуємо вектор переміщення точки серединної поверхні оболонки бікубічними поліномами:

$$\vec{u}=\sum_{i=1}^{4}\left[N_1^{(i)}\left(\xi,\eta\right)\vec{u}^{(i)}+N_2^{(i)}\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial\vec{u}^{(i)}}{\partial\xi}+N_3^{(i)}\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial\vec{u}^{(i)}}{\partial\eta}\right]=\underset{1\times12}{\left\{N\right\}}\underset{12\times1}{\left\{\vec{u}^{(e)}\right\}}\,, \tag{4}$$

де $\left\{\vec{u}^{(e)}\right\}=\left\{\vec{u}^{(1)},\frac{\partial\vec{u}^{(1)}}{\partial\xi},\frac{\partial\vec{u}^{(1)}}{\partial\eta},\vec{u}^{(2)},\frac{\partial\vec{u}^{(2)}}{\partial\xi},\frac{\partial\vec{u}^{(2)}}{\partial\eta},...,\vec{u}^{(4)},\frac{\partial\vec{u}^{(4)}}{\partial\xi},\frac{\partial\vec{u}^{(4)}}{\partial\eta}\right\}^T$ – стовпчик значень векторів переміщень і їх перших похідних у кутових вузлах елемента $(e)$;

$\{N\} = \left\{N_1^{(1)}(\xi,\eta), N_2^{(1)}(\xi,\eta), N_3^{(1)}(\xi,\eta), ..., N_3^{(4)}(\xi,\eta)\right\}$ – вектор-рядок бікубічних функцій форми, які обчислюються за формулами:

$$N_1^{(i)}(\xi,\eta) = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)\left(2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2\right);$$

$$N_2^{(i)}(\xi,\eta) = \frac{1}{8}\xi_i(1+\xi_0)^2(\xi_0-1)(1+\eta_0);$$

$$N_3^{(i)}(\xi,\eta) = \frac{1}{8}\eta_i(1+\xi_0)(1+\eta_0)^2(\eta_0-1); \quad \xi_0 = \xi\xi_i; \quad \eta_0 = \eta\eta_i \quad (i=1,2,3,4). \tag{5}$$

Розклавши у кутових вузлах $(i=1,2,3,4)$ похідні першого порядку від вектора переміщення по глобальних координатах за базисними векторами цих вузлів, дістанемо для зазначених похідних наступні вирази через невідомі функції:

$$\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial \alpha_1} = A_1^{(i)}\left(\varepsilon_{11}^{(i)}\vec{e}_1^{(i)} + \omega_1^{(i)}\vec{e}_2^{(i)} + \phi_1^{(i)}\vec{n}^{(i)}\right); \quad \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial \alpha_2} = A_2^{(i)}\left(\omega_2^{(i)}\vec{e}_1^{(i)} + \varepsilon_{22}^{(i)}\vec{e}_2^{(i)} + \phi_2^{(i)}\vec{n}^{(i)}\right). \tag{6}$$

Для векторів переміщень кутових вузлів СЕ і їх похідних по локальних координатах з використанням матриці Якобі перетворення координат (3) і рівностей (6) отримаємо такі залежності від невідомих вузлових параметрів:

$$\vec{u}^{(i)} = u^{(i)}\vec{e}_1^{(i)} + v^{(i)}\vec{e}_2^{(i)} + w^{(i)}\vec{n}^{(i)} \quad (i=1,2,3,4);$$

$$\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial \xi} = \left(A_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi}\right)^{(i)}\left(\varepsilon_{11}^{(i)}\vec{e}_1^{(i)} + \omega_1^{(i)}\vec{e}_2^{(i)} + \phi_1^{(i)}\vec{n}^{(i)}\right) + \left(A_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi}\right)^{(i)}\left(\omega_2^{(i)}\vec{e}_1^{(i)} + \varepsilon_{22}^{(i)}\vec{e}_2^{(i)} + \phi_2^{(i)}\vec{n}^{(i)}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial \eta} = \left(A_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta}\right)^{(i)}\left(\varepsilon_{11}^{(i)}\vec{e}_1^{(i)} + \omega_1^{(i)}\vec{e}_2^{(i)} + \phi_1^{(i)}\vec{n}^{(i)}\right) + \left(A_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta}\right)^{(i)}\left(\omega_2^{(i)}\vec{e}_1^{(i)} + \varepsilon_{22}^{(i)}\vec{e}_2^{(i)} + \phi_2^{(i)}\vec{n}^{(i)}\right).$$

Підставляючи (7) в (4), приходимо до остаточного виразу для апроксимації вектора переміщень довільної точки СЕ:

$$\vec{u} = \underset{1\times 36}{\{\vec{L}\}}\underset{36\times 1}{\{q^{(e)}\}}, \tag{8}$$

де $\{\vec{L}\} = \left\{N_1^{(1)}\underset{1\times 3}{\{\vec{a}^{(1)}\}}, \left(N_2^{(1)}\frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial \xi} + N_3^{(1)}\frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial \eta}\right)A_1^{(1)}\underset{1\times 3}{\{\vec{a}^{(1)}\}}, \left(N_2^{(1)}\frac{\partial \alpha_2^{(1)}}{\partial \xi} + N_3^{(1)}\frac{\partial \alpha_2^{(1)}}{\partial \eta}\right)A_2^{(1)}\underset{1\times 3}{\{\vec{a}^{(1)}\}}, ...,\right.$

$\left( N_2^{(4)} \dfrac{\partial \alpha_2^{(4)}}{\partial \xi} + N_3^{(4)} \dfrac{\partial \alpha_2^{(4)}}{\partial \eta} \right) A_2^{(4)} \left\{ \underset{1\times 3}{\vec{a}^{(4)}} \right\}\Bigg\}$ – вектор-рядок, який складається з 36 елементів;

$\left\{ q^{(e)} \right\} = \left\{ u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \omega_1^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \varepsilon_{22}^{(1)}, \phi_2^{(1)}, u^{(2)}, ..., \phi_2^{(2)}, ..., \phi_2^{(4)} \right\}^T$ – вектор-стовпчик вузлових варійованих параметрів (ступенів свободи) елемента $(e)$ розмірами $36\times 1$;

$\left\{ \vec{a}^{(i)} \right\} = \left\{ \vec{e}_1^{(i)}, \vec{e}_2^{(i)}, \vec{n}^{(i)} \right\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ – вектори базисів кутових вузлів.

Подамо вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній в криволінійному восьмивузловому чотирикутному елементі у вигляді біквадратичних поліномів серендипового типу:

$$\vec{\phi} = \sum_{i=1}^{8} \Phi^{(i)}(\xi, \eta) \vec{\phi}^{(i)} = \underset{1\times 16}{\left\{ \vec{\Phi} \right\}} \underset{16\times 1}{\left\{ \phi^{(e)} \right\}}, \tag{9}$$

де $\left\{ \vec{\Phi} \right\} = \left\{ \Phi^{(1)} \left\{ \vec{e}^{(1)} \right\}, \Phi^{(2)} \left\{ \vec{e}^{(2)} \right\}, ..., \Phi^{(8)} \left\{ \vec{e}^{(8)} \right\} \right\}$; $\left\{ \phi^{(e)} \right\} = \left\{ \phi_1^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(2)}, \phi_2^{(2)}, ..., \phi_1^{(8)}, \phi_2^{(8)} \right\}^T$; $\vec{\phi}^{(i)} = \phi_1^{(i)} \vec{e}_1^{(i)} + \phi_2^{(i)} \vec{e}_2^{(i)}$; $\left\{ \vec{e}^{(i)} \right\} = \left\{ \vec{e}_1^{(i)}, \vec{e}_2^{(i)} \right\}$ $(i = 1, 2, ..., 8)$.

Складемо додаткові умови, які еквівалентні геометричним гіпотезам Кірхгофа–Лява в окремих вузлах СЕ [3, 4]:

а) в вершинах елемента:

$$\phi_1^{(i)} = \vec{n}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{A_1^{(i)} \partial \alpha_1}; \quad \phi_2^{(i)} = \vec{n}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{A_2^{(i)} \partial \alpha_2} \quad (i = 1, 2, 3, 4); \tag{10}$$

б) посередині сторін елемента:

$$\phi_\tau^{(i)} = \vec{n}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{A_\tau^{(i)} \partial \tau} \quad (i = 5, 6, 7, 8). \tag{11}$$

Крім цих умов, приймається, що кут повороту навколо дотичної $\tau$ до контуру елемента $(e)$ змінюється уздовж сторони за лінійним законом.

За допомогою складених вище додаткових умов (10), (11) виражаємо вектор вузлових кутів повороту через вектор ступенів свободи елемента $\underset{16\times 1}{\left\{ \phi^{(e)} \right\}} = \underset{16\times 36}{\left[ S \right]} \underset{36\times 1}{\left\{ q^{(e)} \right\}}$ і отримуємо остаточну апроксимацію для вектора кутів повороту

$$\vec{\phi} = \underset{1\times 16}{\left\{ \vec{\Phi} \right\}} \underset{16\times 36}{\left[ S \right]} \underset{36\times 1}{\left\{ q^{(e)} \right\}} = \underset{1\times 36}{\left\{ \vec{F} \right\}} \underset{36\times 1}{\left\{ q^{(e)} \right\}}, \tag{12}$$

де $[S]$ – матриця зв’язку компонентів вектора вузлових кутів повороту з компонентами вектора ступенів свободи СЕ.

Використовуючи співвідношення (1), (8) і (12), умови стаціонарності функціоналу Лагранжа та традиційну процедуру МСЕ, приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка моделює напружено-деформований стан тонкої оболонки складної геометрії під дією статичного навантаження.

Таким чином, в роботі побудовано векторний варіант скінченного елемента для розрахунку тонких оболонок складної форми, який задовольняє умовам неперервності векторів переміщень і кутів повороту та точно описує поступальну частину переміщення скінченного елемента як жорсткого цілого. Ефективність розробленого варіанту МСЕ перевірена шляхом розв’язання тестових задач.

**Список літератури**

1. Сторожук Є.А. Варіаційний векторно-різницевий метод у нелінійних задачах теорії тонких оболонок з криволінійними отворами // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Вип. 3. – Дніпропетровськ, 2009. – С. 149–156.
2. Новожилов В.В. Линейная теория тонких оболочек / В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И. Михайловский – Ленинград: Политехника, 1991. – 656 с.
3. Areias P.M.A. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints / P.M.A. Areias, J.-H. Song, T. Belytschko // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2005. – 64, № 9. – P. 1166–1206.
4. Guz A.N. Physically and Geometrically Nonlinear Static Problems for Thin-Walled Multiply Connected Shells / A.N. Guz, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 6. – P. 679–687.

## Vector form of the finite element method for modeling the stress-strain state of thin shells

**Storozhuk Yevhen; Chernyshenko Ivan; Korniienko Viktoriia**

*The formulation of boundary value problems for thin shells of complex shape under the action of a static load is given. The initial equations are the theory of non-shells, in which the Kirchhoff – Love hypotheses hold. The geometric relationships are written in vector form, and the physical ones are based on Hooke's law for isotropic materials. Using the finite element method, a technique has been developed for numerically solving two-dimensional static problems for thin shells of complex geometry. The resolving equations in the displacements are obtained from the stationary conditions of the discrete analog of the Lagrange functional. A variant of joint finite elements with 36 degrees of freedom is proposed. A feature of the developed modification of the finite element method is the vector approximation of the sought quantities and discrete fulfillment of the geometric part of the Kirchhoff – Love hypotheses. The finite element constructed in such a way for thin shells of complex shape satisfies the continuity conditions for the displacement vectors and rotation angles and accurately describes the translational part of the finite element displacement as a rigid body.*
*Keywords: complex shells; static load; finite element method; vector approximation; Kirchhoff–Love discrete hypotheses.*