

УДК 539.376

Методика визначення області нелінійно-пружного деформування

Резнік В.С.

Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України, м.Київ, Україна

Деформування в'язкопружних середовищ задається за допомогою визначальних рівнянь спадкового типу. Ці рівняння встановлюють залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і часовим інтегральним оператором і містять набір функцій і коефіцієнтів, що визначаються з базових експериментів. Межа застосування даних рівнянь обмежується певним рівнем напружень, що не перевищує межу нелінійно-пружного деформування. В цьому випадку траєкторія розвантаження буде співпадати із траєкторією навантаження. Якщо рівень напружень перевищує межу нелінійно-пружного деформування, то матеріал поводить себе як пружнопластичний і застосування моделі призводить до великих похибок у розрахунках. В роботі наведено методику визначення області нелінійно пружного деформування, яка включає в себе апроксимацію діаграми миттєвого деформування, знаходження значення дотичного модуля, розрахунку критичного значення напружень, починаючи з якого матеріал поводить себе як пружнопластичний.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність; межа нелінійно-пружного деформування; діаграма миттєвого деформування; сплайн апроксимація; дотичний модуль.

Постановка задачі. Залежність між деформаціями, напруженнями і часом для нелінійно-в'язкопружних матеріалів в одновимірному випадку задається рівняннями [1, 2]

$$\begin{aligned}\varphi_0(\varepsilon(t)) &= \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \\ \sigma(t) &= \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau)\varphi_0(\varepsilon(\tau))d\tau,\end{aligned}\quad (1)$$

де перше рівняння описує процес повзучості, а друге – процес релаксації. Тут $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(\tau)$ – повна деформація, що включає пружну компоненту ε^e і деформацію повзучості ε^c в моменти часу t і τ ; $\sigma(t)$, $\sigma(\tau)$ – напруження, що діє в моменти часу t і τ ; $\varphi_0(\cdot)$ – функція, що задає діаграму миттєвого деформування; $K(t-\tau)$ – ядро повзучості; $R(t-\tau)$ – ядро релаксації; λ – реологічний параметр ($\lambda > 0$); t – час спостереження; τ – час, що передує моменту спостереження.

В (1), на відміну від базової нелінійної спадкової моделі, запропонованої у [3], функція $\varphi_0(\cdot)$ використовується не тільки при $t = 0$, але і для всіх значень $t > 0$. В цьому випадку, розв'язуючи перше рівняння в (1) відносно $\varepsilon(t)$, для розрахунку величини деформації $\varepsilon(t)$ отримаємо

$$\varepsilon(t) = \varphi_0^{-1}(\sigma) = \psi_0 \left\{ \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right\}, \quad (2)$$

де $\psi_0(\cdot)$ – обернення функції $\varphi_0(\cdot)$. Функція $\varphi_0(\cdot)$ і обернена функція $\psi_0(\cdot)$ є функціями миттєвого навантаження.

Межа застосування даних рівнянь (1) обмежується певним рівнем напружень, що не перевищує межу нелінійно-пружного деформування. В цьому випадку траєкторія розвантаження буде співпадати із траєкторією навантаження. Якщо рівень напружень перевищує межу нелінійно-пружного деформування, то матеріал поводить себе як пружнопластичний. В роботі наведено методику визначення області нелінійно пружного деформування.

Методика визначення нелінійно-пружного деформування. Вважається, що матеріал деформується нелінійно-пружно при напруженнях σ , що не перевищують деяке критичне значення σ_* . Значення σ_* відповідає ординаті точки на діаграмі „ $\sigma - \varepsilon$ ” (рис.1), для якої дотичний модуль $\bar{E}(\varepsilon_*)$ задовольняє співвідношенню [3]

$$\bar{E}(\varepsilon_*) = \frac{1}{2 \ln 2} E, \quad (3)$$

де E – модуль лінійної пружності.

У разі напружень $\sigma > \sigma_*$ матеріал поводить себе як пружнопластичний, так що траєкторії навантаження та розвантаження не співпадають.

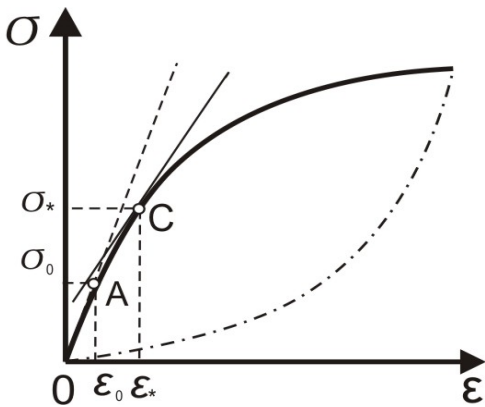


Рис. 1 Область нелінійно-пружного деформування; σ_*, ε_* – граничне значення напружень і деформацій межі нелінійно-пружного деформування; σ_0, ε_0 – напруження і деформації пружного деформування.

Межа застосування розглянутої моделі обмежується рівнем напружень [1], що не перевищує межу нелінійно-пружного деформування, яка обмежується рівнем напружень σ_* , для якого виконується умова (1). В цьому випадку траєкторія розвантаження буде співпадати із траєкторією навантаження. Для визначення величини σ_* скористаємось із рівнянням для поточного значення дотичного модуля $\bar{E}(\varepsilon)$ із врахуванням (3).

Диференціюючи апроксимацію функції

$$\varphi_0(\varepsilon) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon + a_{2,j}\varepsilon^2 + a_{3,j}\varepsilon^3, \quad j = \bar{1}, n, \quad (4)$$

по ε , для величини $\bar{E}(\varepsilon)$ отримаємо співвідношення

$$\bar{E}(\varepsilon) = \frac{d\varphi_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} = a_{1,j} + 2a_{2,j}\varepsilon + 3a_{3,j}\varepsilon^2, \quad (5)$$

яке із урахуванням (3) зводиться до квадратного рівняння

$$a_{1,j} + 2a_{2,j}\varepsilon + 3a_{3,j}\varepsilon^2 = \frac{1}{2 \ln 2} E. \quad (6)$$

Тут коефіцієнти $a_{1,j}$, $a_{2,j}$ і $a_{3,j}$ визначаються за результатами сплайн апроксимації рівнянням (5) діаграми миттєвого деформування (4) у всьому діапазоні значень ε .

Коренями рівняння (4) є два значення ε_* . Підставивши більше значення ε_* в (4), отримаємо рівняння

$$\varphi_0(\varepsilon_*) = \sigma_* = a_{1,j}\varepsilon_* + a_{2,j}\varepsilon_*^2 + a_{3,j}\varepsilon_*^3, \quad (7)$$

яке дозволяє розрахувати величину σ_* і яке дозволяє визначити по напруженнях межу нелінійно-в'язкопружного деформування матеріалу.

Висновки

В роботі для нелінійних рівнянь спадкового типу наведено методику визначення області нелінійно пружного деформування, яка включає в себе апроксимацію діаграми миттєвого деформування, знаходження значення дотичного модуля, розрахунку критичного значення напружень, починаючи з якого матеріал поводить себе як пружнопластичний.

Список літератури

1. Голуб В.П. Длительная нелинейная ползучесть вязкоупругих волокнистых однонаправленных композитов при растяжении // Вісник Донецького університету. Серія А, природні науки. Частина 1.- 2006, сс. 97-101.
2. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В. Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования // Прикл. механика.- 2007.- 43, №5, сс. 20-34.
3. Работнов Ю.Н. Некоторые вопросы теории ползучести // Вестник Московского университета.- 1948.- №10, сс. 81-91.
4. Бокшицкий М.Н. Длительная прочность полимеров.- М.: Химия, 1978.-308 с.
5. Голуб В.П. Моделирование одномерной ползучести методом изохрон / В.П.Голуб, А.С.Олейник // Прикл. механика.- 1988.-Том24, №12.-С. 71-79.
6. Голуб В.П. Нелинейная ползучесть вязкоупругих армирующих волокон при растяжении / В.П.Голуб, Ю.М.Кобзарь, Фернати П.В. // Прикл. механика.- 2005.- Том 41, №7.- С. 102-115.

Methods for determining the region of nonlinear elastic deformation

Reznik Vira

Abstract . The deformation of viscoelastic materials is given by defining equations of the hereditary type. These equations establish the relationship between the components of the strain tensor, the stress tensor and the time integral operator and contain a set of functions and coefficients determined from the basic experiments, as well as certain limitations in the application. The limit of application of these equations is limited to a certain level of stresses that does not exceed the limit of nonlinear elastic deformation. In this case, the unloading trajectory will coincide with the load trajectory. If the stress level exceeds the limit of nonlinear-elastic deformation, the material behaves as elastic-plastic and the application of the model leads to large errors in calculations. The paper presents a method for determining the region of nonlinear elastic deformation, which includes approximation of the instantaneous deformation diagram, finding the value of the tangent modulus, calculating the critical stress value, from which the material behaves as elastic-plastic.

Keywords nonlinear viscoelasticity; limit of nonlinear elastic deformation; instantaneous deformation diagram; spline approximation; tangent module.