

УДК 539.3

## Розрахунок багатошарових конструкцій

Бабенко А. Є., Боронко О. О., Трубачев С.І.

КПІ ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

**Анотація.** Розроблен метод та автоматизована система розрахунку багатошарових конструкцій на міцність під дією статичних та вібраційних навантажень. Метод розрахунку базується на новому підході побудови функціоналу типу Релея, та мінімізації його ітераційним методом по координатного спуску. Використання метода покоординатного спуску дозволяє уникнути проблем, що пов'язані з формуванням, зберіганням та оперуванням з глобальними матрицями жорсткості та мас. Це дає можливість розв'язувати задачі великої розмірності використовуючи тільки оперативну пам'ять ПСОМ. Програмний комплекс дозволяє розв'язувати задачі на власні коливання, вимушені коливання з урахуванням розсіювання енергії. Програмне забезпечення сформоване за модульним принципом, що дає можливість удосконалювати та розширювати даний пакет прикладних програм. Програмне забезпечення пройшло тестування на великій кількості тестових та прикладних задач. Запропонований метод розрахунку та розроблене програмне забезпечення були впроваджені в інженерну практику.

**Ключові слова.** Багатошарові конструкції, метод покоординатного спуску, власні коливання, вимушені коливання, розсіювання енергії.

У сучасній промисловості багатошарові конструкції знайшли широке впровадження, тому розрахунок на міцність таких конструкцій є актуальною задачею. Внаслідок складної геометричної форми багатошарових пластинчато-оболонкових систем, умов закріплення та навантаження аналітичні методи розрахунку виявляються не завжди ефективними, тому необхідно застосовувати чисельні методи розрахунку. В даній роботі використовується метод, що базується на варіаційно-сітковому підході. При цьому нескінченномірний простір допустимих функцій заміняється скінченномірним шляхом дискретизації досліджуемого об'єкта на скінченне число підобластей та апроксимації шуканих функцій в цих підобластях. Для шаруватих пластинчато-оболонкових систем в якості базової підобласті використовується трикутник, в якому на відміну від інших скінчених елементів застосовуються різні апроксимації переміщень за слоями. Переміщення в тонких несучих шарах апроксимуються лінійними та неповним кубічним поліномами, а для заповнювача приймається гіпотеза о кубічному розподілі переміщень за товщиною. Використання даної моделі дає можливість визначити напружено-деформований стан, як кожного шару окремо, так і всього пакету в цілому. Дана модель дає можливість проаналізувати напружено-деформований багатошарових систем стан при різних граничних умовах для кожного з шарів, а також для всього пакета шарів в цілому. При дослідженні віброміцності багатошарових конструкцій, що знаходяться під дією вібраційних навантажень, основна складність полягає у визначенні спектру власних частот і форм коливань. Для визначення першої власної частоти та форми в роботі використовується метод квазістатичних ітерацій. Функціонал, який необхідно мінімізувати при використанні метода квазістатичних ітерацій має вигляд

$$I = \int_V \bar{U} dV - \omega^2 \int_V \bar{K} dV \quad (1)$$

де  $\bar{U}$  і  $\bar{K}$  - квадратичні форми, які визначаються за формулами:

$$\bar{U} = B(c, c) = \frac{1}{2} \sum_{S=1}^N \sum_{K=1}^N C_{SK} c_K c_S \quad (2)$$

$$\bar{K} = K(c, c) = \frac{1}{2} \sum_{S=1}^N \sum_{K=1}^N A_{SK} c_K c_S \quad (3)$$

Для мінімізації функціоналу (1) використовується ітераційний процес метода покоординатного спуску [1,2].

Тоді функціонал (2) в  $k+1$  наближенні записується у вигляді:

$$I^{k+1} = (Bc^{k+1}, c^{k+1}) - (K(\omega_1^{(1)})^2 c^k, c^{k+1}) \quad (4)$$

$$\text{Де } (\omega^k)^2 = \frac{B(c^k, c^k)}{K(c^k, c^k)} \quad (5)$$

$$F_i^k = (\omega^k)^2 (Kc^k, e_i) \quad (6)$$

тоді функціонал (1) на  $k+1$  наближенні, буде мати вигляд

$$I^{k+1} = (Bc^k + \gamma_i^{k+1} e_i, c^k + \gamma_i^{k+1} e_i) - [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, c^k + \gamma_i^{k+1} e_i) \quad (7)$$

Або після перетворень:

$$\begin{aligned} I^{k+1} = & (Bc^k, c^k) + 2\gamma_i^{k+1} (Bc^k, e_i) + (\gamma_i^{k+1})^2 (Be_i, e_i) - \\ & - [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, c^k) - \gamma_i^{k+1} [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i) \end{aligned} \quad (8)$$

Приріст функціонала на  $k+1$  наближенні дорівнює:

$$\Delta I^{k+1} = 2\gamma_i^{k+1} (Bc^k, e_i) + (\gamma_i^{k+1})^2 (Be_i, e_i) - \gamma_i^{k+1} [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i) \quad (9)$$

Величина кроку визначається з умови максимальної швидкості зменшення  $\Delta I^{k+1}$

$$\frac{\partial \Delta I^{k+1}}{\partial \gamma_i^{k+1}} = 0 \quad (10)$$

$$\text{Тоді } 2(Bc^k, e_i) + 2\gamma_i^{k+1} (Be_i, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i) = 0 \quad (11)$$

Звідси величина кроку визначається співвідношенням

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i)}{2(Be_i, e_i)} \quad (12)$$

Таким чином ітераційний процес спрощується і остаточна формула для визначення кроку має таку ж структуру, як і для статичної задачі. Для визначення спектра власних частот та форм коливань пропонується використовувати новий метод - метод підвищення жорсткостей, який оснований на використанні мінімакських властивостей функціонала Релея-Рітца. При використанні метода підвищення жорсткостей для визначення 2-ї та більш високих власних частот та власних форм необхідно вирішити задачу мінімізації функціонала типу Релея.

$$I(\bar{v})_{\bar{v} \in R^N} = \frac{U_h(\bar{v}) + c \sum_{n=1}^{l-1} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial K_h}{\partial z_i^{(n)}} v_i \right)^2}{K_h(\bar{v})} \quad (13)$$

Також для мінімізації функціонала (13) використовується метод покоординатного спуску. Метод підвищення жорсткостей є найбільш ефективним та економічним методом з точки зору обчислювальних ресурсів порівняно з традиційним методом, в якому кожна наступна форма і частота знаходиться шляхом мінімізації на підпросторі, що ортогональний всім попереднім знайденим власним векторам. Слід підкреслити, що метод підвищення

жорсткостей дозволяє визначити необхідну кількість власних частот і форм коливань, включаючи кратні, що важливо при розв’язуванні задачі о вимушених коливаннях механічних систем. При розрахунку вимушених коливань шукані функції розкладаються в ряд Фур’є за власними формами коливань. Зовнішнє та внутрішнє в’язке тертя може бути враховано за умови, що матриця демпфування пропорційна матриці жорсткості або матриці мас.

На основі запропонованого методу було розроблено алгоритми та пакети прикладних програм (ППП). ППП було налагоджено та удосконалено на великій кількості тестових та прикладних задач різної складності. Чисельні результати було порівняно з результатами, отриманими аналітичними або іншими чисельними методами, а також із відповідними експериментальними даними. Похибка у визначенні власних частот не перевищувала 5%. Запропонований метод та його реалізація у вигляді автоматизованій системи розрахунку багатослойних конструкцій отримали впровадження в інженерну практику

## Calculation of multilayer structures

**Babenko A., Boronko O, Trubachev S.**

***Abstract.** A method and an automated system for calculating multilayer structures for strength under the action of static and vibration loads have been developed. The calculation method is based on a new approach to constructing a Rayleigh-type functional, and minimizing it by the iterative method of coordinate descent. The use of the coordinate descent method avoids the problems associated with the formation, storage and operation of global matrices of stiffness and mass. This allows you to solve large-scale problems using only PC RAM. The software allows you to solve problems on their own oscillations, forced oscillations, taking into account energy dissipation. The software is formed on a modular basis, which allows you to improve and expand this package of applications. The software has been tested on a large number of test and application tasks. The proposed calculation method and developed software have been implemented in engineering*

***Keywords.** Multilayer structures, coordinate descent method, natural oscillations, forced oscillations*

## Расчет многослойных конструкций

**Бабенко А. Е., Боронко О. А., Трубачев С.И.**

***Аннотация.** Разработан метод и автоматизированная система расчета многослойных конструкций на прочность под действием статических и вибрационных нагрузок. Метод расчета базируется на новом подходе построения функционала типа Рэлея, и минимизации его итерационным методом покоординатного спуска. Использование метода покоординатного спуска позволяет избежать проблем, связанных с формированием, хранением и оперированием с глобальными матрицами жесткости и масс. Это дает возможность решать задачи большой размерности используя только оперативную память ПЕОМ. Программный комплекс позволяет решать задачи на собственные колебания, вынужденные колебания с учетом рассеяния энергии. Программное обеспечение сформировано по модульному принципу, что дает возможность совершенствовать и расширять данный пакет прикладных программ. Программное обеспечение прошло тестирование на большом количестве тестовых и прикладных задачах. Предложенный метод расчета и разработанное программное обеспечение были внедрены в инженерную практику*

***Ключевые слова** Многослойные конструкции, метод покоординатного спуска, собственные колебания, вынужденные колебания, рассеяние энергии.*

### Список літератури

1. Бабенко А. Е. Определение частотного спектра и собственных форм колебаний упругих систем методом повышения жесткостей // А. Е. Бабенко, О. А. Боронко, О.Н. Василенко, С. И. Трубачев / Проблемы прочности. – 1990. – № 2 – с. 122-124.
2. Бабенко А. Е. Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно-деформированного состояния при статических и вибрационных нагрузках // А. Е. Бабенко, Н. И. Бобырь, С. Л. Бойко, О. А. Боронко / – К.: Инрес, 2005. – 264 с.