

УДК 539.3

Рівняння руху мас моделі маятника Челомея

Цибенко О.С., Кришук М.Г., Лавренко Я.І., Олещук А.М.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

Анотація. Для перевірки положень, заявлених Богомоловим В.І. [1], Пузановим Б.І. [2] і Ліневичем Е.І. [3] про можливість здійснення понад одиничної роботи силами інерції запропонована до розгляду замкнута механічна система у вигляді кінематично пов'язаних обертових мас. Дослідження мало на меті в рамках механіки Ньютона вивчити виконання законів збереження імпульсу, моменту імпульсу і енергії, встановити можливість здійснення роботи силами інерції (відцентрової і коріолісову), дати оцінку зміни кінетичних параметрів на прикладі моделі маятника Челомея. Для складного радіально-колового руху мас моделі маятника Челомея отримані визначальні рівняння. Для перевірки аналітичних викладок розроблено та реалізовано в програмному комплексі MathCAD алгоритми чисельних розв'язків вищезазначених задач.

Ключові слова. Закон збереження енергії, імпульс, момент імпульсу, сили інерції, моделі, маятник Челомея, рівняння руху, маса, жорсткість, обертання, вектори, швидкість, кутові прискорення

Розглянемо конструктивний аналог маятника Челомея [1] у якому здійснюється рух симетрично розташованих пружних (жорсткість C) мас m вздовж радіальних направляючих, що обертаються по закону $\varphi_{\Pi}(t)$ навколо осі z (рис.1а).

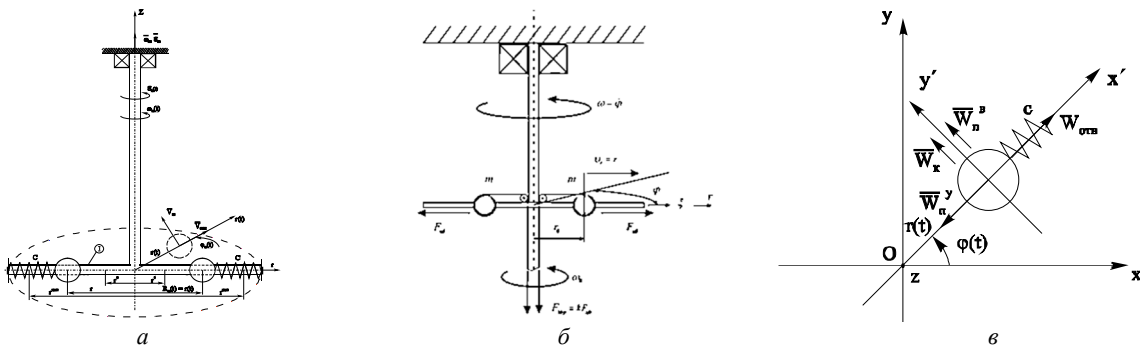


Рис. 1. Конструктивний аналог маятника Челомея (а), безпружинний варіант маятникової системи (б), графічне зображення прискорень у складному радіально-коловому русі мас m

Складний рух кожної точкової маси представимо у вигляді суми відносного ($r(t)$) та переносного ($\varphi_{\Pi}(t)$) вкладів. Характерною особливістю задачі, що розглядається є те, що траєкторія відносного, переносного та, відповідно, абсолютного руху мас m лежать в одній площині (обертання). Вісь z , на яку проєктуються вектори переносної кутової швидкості

$$\omega_{\Pi}(t) = \frac{d\varphi_{\Pi}(t)}{dt} \quad (1)$$

та переносного кутового прискорення

$$\varepsilon_{\Pi}(t) = \frac{d\omega_{\Pi}(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi_{\Pi}(t)}{dt^2} \quad (2)$$

ортогональна площині обертання.

Кут повороту $\varphi_{\Pi}(t)$ вважаємо додатнім, якщо з боку вісі z його видно проти годинникової стрілки. Шукані кінематичні характеристики руху мас m отримуємо з векторних рівностей [4]

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_{\Pi}, \quad (3)$$

$$\vec{W} = \vec{W}_{\text{отн}} + \vec{W}_{\Pi} + \vec{W}_k, \quad (4)$$

де $\vec{V}_{\text{отн}}$, $\vec{W}_{\text{отн}}$ и \vec{V}_{Π} , \vec{W}_{Π} – відповідно відносні та переносні швидкості та прискорення, $\vec{W}_k = 2\vec{\omega}_{\Pi} \times \vec{V}_{\text{отн}}$ – прискорення Кориоліса.

Відносна швидкість $\vec{V}_{\text{отн}}$ в загальному випадку визначається диференціюванням по часу дугової координати $\sigma(t)$ маси m у рухомій системі координат

$$V_{\text{отн}}^{\tau} = \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad (5)$$

При цьому вектор $V_{\text{отн}}^{\tau}$ направлений по дотичній до відносної траєкторії в бік збільшення σ , якщо $V_{\text{отн}}^{\tau} > 0$, та в зворотній бік у протилежному напрямку, а модуль вектору відносної швидкості рівний

$$V_{\text{отн}} = |V_{\text{отн}}^{\tau}| \quad (6)$$

В задачі, що розглядається $\sigma(t) = r(t)$, і таким чином

$$V_{\text{отн}}(t) = V_r(t) = \frac{dr(t)}{dt}, \quad (7)$$

а її напрям відповідає $r(t)$ (рис.1а).

Переносну швидкість у обертальному русі визначаємо як колову

$$V_{\Pi}(t) = |\omega_{\Pi}(t)|R_{\Pi}(t), \quad (8)$$

де $R_{\Pi}(t)$ відстань від точки m в момент часу t до вісі z переносного обертання, при цьому (рис.1а)

$$R_{\Pi}(t) = r(t) \quad (9)$$

а вектор $\vec{V}_{\Pi}(t)$ направлений по нормалі до $r(t)$ в бік переносного обертання.

Вектор абсолютної швидкості мас m визначається з векторної суми (3), причому його модуль рівний

$$V = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_{\Pi}^2} = \sqrt{\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 + \left[\frac{d\varphi_{\Pi}(t)}{dt} \cdot r(t)\right]^2} \quad (10)$$

Відносне прискорення в загальному випадку криволінійної відносної траєкторії $\sigma(t)$ руху точкової маси проставлено сумою [7]

$$\vec{W}_{\text{отн}} = \vec{W}_{\text{отн}}^{\tau} + \vec{W}_{\text{отн}}^{\text{н}} \quad (11)$$

де $W_{\text{отн}}^{\tau} = \frac{dV_{\text{отн}}^{\tau}}{dt}$, $W_{\text{отн}}^{\text{н}} = \frac{(V_{\text{отн}}^{\tau})^2}{R}$, R – радіус кривизни лінії $\sigma(t)$ в точці m .

Для прямолінійної (радіальної) траєкторії, що відповідає випадку, що розглядається (рис.1в), $W_{\text{отн}}^{\text{н}} = 0$, а вектор $\vec{W}_{\text{отн}}^{\tau}$ (дотичний до відносної траєкторії $\sigma(t)$) направлений по радіусу $r(t)$, при цьому його модуль

$$W_{\text{отн}} = \frac{dV_r(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2} \quad (12)$$

Переносне прискорення для руху мас m (рис.1) визначається як

$$\vec{W}_{\Pi} = \vec{W}_{\Pi}^y + \vec{W}_{\Pi}^B, \quad (13)$$

$$\vec{W}_{\Pi}^y = \omega_{\Pi z}^2 \cdot R_{\Pi} = \left[\frac{d\varphi_{\Pi}(t)}{dt}\right]^2 \cdot r(t), \quad (14)$$

$$\vec{W}_{\Pi}^B = \varepsilon_{\Pi z} \cdot R_{\Pi} = \frac{d\omega_{\Pi z}}{dt} \cdot R_{\Pi} = \frac{d^2\varphi_{\Pi}(t)}{dt^2} \cdot r(t) \quad (15)$$

Вектор \overline{W}_Π^B направлений перпендикулярно радіусу $R_\Pi(t) = r(t)$, а вектор \overline{W}_Π^Y - до вісі переносного обертання (вздовж $r(t)$).

Прискорення Кориоліса (рис. 1в) визначаємо з врахуванням того, що в задачі, що розглядається вектор переносної кутової швидкості ортогональний вектору відносної швидкості, при цьому

$$W_k = 2|\omega_{\Pi Z}| \cdot |V_{\text{отн}}| \cdot \sin(\pi/2) = 2|\omega_{\Pi Z}| \cdot |V_{\text{отн}}| = 2 \frac{d\varphi_\Pi(t)}{dt} \cdot \frac{dr(t)}{dt} \quad (16)$$

Для отримання рівняння руху механічної системи, що розглядається, використовуємо принцип Д'Аламбера [4], згідно якого динамічна рівновага по формі еквівалентна статичному та являється результатом сил інерції (Д'Аламберових)

$$\overline{F}_{\text{ин}} = -m \cdot \overline{W} \quad (17)$$

При цьому рівняння руху мас m в площині обертання для довільного моменту часу t (рис. 1в) представимо у вигляді

$$\sum_k F_{kr} = 0, \quad \sum_k m \omega m_0 = 0, \quad (18)$$

де F_k діючі та Д'Аламберові сили, $m \omega m_0$ - моменти цих сил відносно точки O . F_{kr} проєкції сил на напрям $\vec{r}(t)$.

Підстановка в (18) виразів відповідних прискорень з (11)–(16) дає:

$$\begin{cases} \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - \left[\frac{d\varphi(t)}{dt} \right]^2 \cdot r(t) + \frac{c}{m} (r(t) - r_0) = 0 \\ \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \frac{2}{r(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} \frac{dr(t)}{dt} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Відмітимо, що останній доданок у першому рівнянні (19) характеризує силу дії радіальної пружної безмасової пружини жорсткості C (рис. 1а), що має рівноважне розташування в точці $r = r_0$.

Сформульовані рівняння (19) доповнимо початковими умовами, що відповідають роботі системи (рис. 1а). Приймаємо до уваги, що маятник попередньо розкручений до постійної кутової швидкості ω_0 при зафіксованих у положенні r_0 масах m .

Вважаємо, що початку роботи маятника відповідає момент часу дефіксації мас $t_0 = 0$ при нульовому куті повороту $\varphi_0 = 0$, що відповідає початку виникнення руху мас у радіальному напрямку (відносного), як наслідок, появи реакції пружин та, відповідно, зміні кутової швидкості ω обертання мас m .

Таким чином, кінцева форма рівнянь руху імітаційної моделі системи (рис. 1а):

$$\begin{cases} \ddot{r} - (\dot{\varphi})^2 r + \omega_0^2 (r - r_0) = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\varphi} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

початкові умови ($t=0$): $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$, $r = r_0$, $\dot{r} = 0$.

Тут крапка означає диференціювання по часу t , $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ - власна частота коливань лінійного пружинного маятника. Як окремий випадок маятникової системи (рис. 1б) будемо розглядати також її без пружинний варіант з можливістю варіювання силами опору F_{comp} радіальному зміщенню обертових мас.

З врахуванням сили опору, що задається у формі $F_{\text{comp}} = kF_{\text{цб}}$, $0 \leq k \leq 1$ рівняння динаміки мас (20) для системи (рис. 1б) з початковими умовами при $t = 0$ навели як

$$\begin{cases} \dot{r} - (1-k)(\dot{\varphi})^2 r = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$\varphi = 0, r = r_0, \dot{\varphi} = \omega_0, \dot{r} = 0. \quad (22)$$

Робота сил опору, що частково компенсує дію відцентрових сил, визначається інтегралом виду:

$$A_{\text{comp}}(r) = \int_{r_0}^r F_{\text{comp}}(r') dr' = \int_{r_0}^r km\dot{\varphi}^2 r' dr' = km \int_{r_0}^r \dot{\varphi}^2(r') r' dr'. \quad (23)$$

В свою чергу кінетична енергія руху кожної маси (для першого та другого варіантів пристроїв) рівна

$$T = \frac{m}{2} [(\dot{\varphi}r)^2 + \dot{r}^2]. \quad (24)$$

Для перевірки аналітичних викладок розроблені та реалізовані в програмному комплексі MathCAD алгоритми чисельного розв’язку вище наведених задач. Результати математичного моделювання наведені у табличній та графічній формі для розглянутих моделей маятника Челомея.

Список литературы

1. Богомолов В.И. «Эксперимент по использованию свободной энергии», «Новая Энергетика», №1, 2004.
2. Пузанов Б.И. «Энергия центробежных сил инерции»: <http://swm-free.front.ru/energy/1.html>
3. Линевиц Э.И. Применение центробежной силы в качестве источника мощности. <http://www.dlinevitch.narod.ru/pages.htm>
4. Павловський М.А. Теоретична механіка. Видавництво „Техніка”, Київ – 2002.-510 с.
5. Очков В.Ф. MathCAD 14 для студентов та инженероv.- СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 512с.

Equations of motion of masses of the Chelomey pendulum model

Tsybenko A., Kryshchuk N., Lavrenko Y., Oleshchuk A.

Abstract. To verify the provisions stated by V.I. Bogomolov, B.I. Puzanov. and Linevich E.I. about the possibility of performing over-unit work by inertial forces, a closed mechanical system in the form of kinematically connected rotating masses is proposed for consideration. The research aimed, within the framework of Newtonian mechanics, to study the fulfillment of the laws of conservation of momentum, angular momentum and energy, to establish the possibility of performing work by inertial forces (centrifugal and Coriolis), to assess the change in kinetic parameters using the example of the Chelomey pendulum model. For the complex radial-circular motion of the masses of the Chelomey pendulum model, resolving equations are obtained. To verify the analytical calculations, algorithms for numerical solutions of the above problems have been developed and implemented in the MathCAD software package.

Keywords. Energy conservation law, momentum, momentum, moment of inertia, model, Chelomey pendulum, equation of motion, mass, stiffness, rotation, vectors, velocity, angular accelerations