УДК 531/534

К вопросу Анализа уравнений движения твердого тела при механических колебаниях

Добров И.В., Семичев А.В.
Национальная металлургическая академия Украины, г. Днепр, Украина

Аннотация. *В зависимости текущего положения груза на различных участках деформации пружины в процессе колебаний величина, определяющая собственную частоту свободных незатухающих колебаний, имеет противоположные знаки в зависимости от изменения направления ускорения груза на этих участках, что позволяет определить единое неоднородное дифференциальное уравнение процесса колебаний на различных участках движения груза. При амплитуде колебаний намного меньше статического положения груза, это неоднородное дифференциальное уравнение вырождается в однородное дифференциальное уравнение свободных не затухающих колебаний.*

Ключевые слова: *прикладная механика; свободные колебания; неоднородное уравнение колебаний.*

Свободные колебания массивного твердого тела на идеальной упругой пружине[1] является классическим примером механической задачи, которая хорошо изучена, и корректно описана системой уравнений при колебаниях груза вблизи статического равновесия груза на деформированной пружине, когда амплитуда колебаний намного меньше величины деформации пружины при статическом равновесии груза [1, 2].

Целью работы является анализ уравнений движения свободных колебаний массивного груза на идеальной пружине растяжения, на любом из участков деформации пружины независимо от амплитуды свободных колебаний.

При анализе уравнений движения груза в процессе свободных колебаниях используется следующее определения сил, действующих в процессе перемещения тел механической системы [3]. Силы, действующие на груз 1, массой m_1, в направлении скорости движения груза не зависимо от природы этих сил (сила тяжести груза ($G_1 = m_1 g$, где g - ускорение свободного падения), сила инерции груза (Φ_1), сила (P_{12}) деформированной пружины 2) будем определять, как силы движения[2] и величина этих сил, не зависимо от принятой системы координат, всегда положительна. Соответственно силы, действующие на груз 1 в направлении противоположном скорости движения груза, будем определять как силы сопротивления движению[3] и величина этих сил всегда меньше нуля [3].

Рассмотрим процесс свободных незатухающих колебаний (рис. 1) груза 1 на упругой пружине растяжения 2, закрепленной на неподвижном основании 3. До начала ($t_0 = 0$) деформации пружины 2, длина которой в не деформированном состоянии составляет l_0, груз 1 находится в положении $y(0) = 0$ системы координат OXY под действием уравновешенных сил: силы тяжести груза G_1 и внешней силы $P_1^{(e)} = G_1$ (на рис. 1, a условно не показанной). В

---

[1] Идеальной упругой пружиной (далее по тексту пружина) будем считать пружину, деформация витков которой подчиняется линейному закону и не сопровождается диссипацией механической энергии, а массу этой пружины в процессе колебаний можно не учитывать.

[2] Далее по тексту и на рис. для обозначения этих сил в нижнем индексе обозначения силы добавляется буква F. Например $G_{1,F}$, $\Phi_{1,F}$, $P_{12,F}$ - сила движения, действующая на груз 1 со стороны пружины 2.

[3] Далее по тексту и на рис. для обозначения этих сил в нижнем индексе обозначения силы добавляется буква Q. Например $G_{1,Q}$, $\Phi_{1,Q}$, $P_{12,Q}$ - сила сопротивления движению, действующая на груз 1 со стороны пружины 2.

момент времени $t_0 = 0$ действие внешний силы прекращается и начинается процесс свободных колебаний с ускоренного движения груз 1 вдоль оси OY (рис. 1, *а*) при следующих начальных условиях:

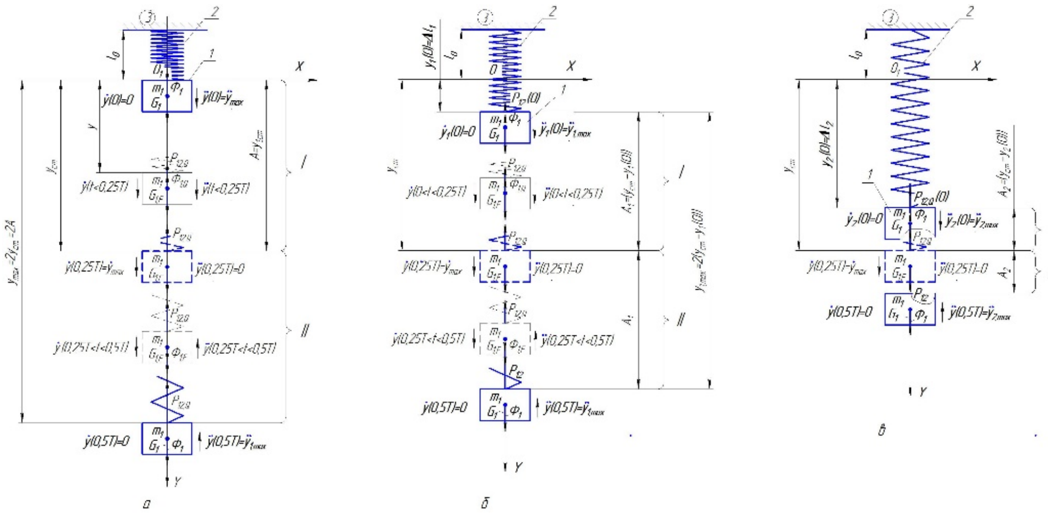

Рис. 1. Расчетная схема свободных не затухающих вертикальных колебаний в зависимости от начальных условий: *а* - $y(0) = y_{cm}$; *б* - $y_1(0) < y(0)$; *в* - $y_2(0) << y_{cm}$

(рис. 1, *а*) при следующих начальных условиях:

$$y(0) = 0\,;\ \dot{y}(0) = 0\,; \ddot{y}(0) = g\,. \tag{1}$$

За время t равное половине периода колебаний ($t = 0,5T$) груз 1 перемещается не изменяя направление скорости $\vec{\dot{y}}(t)$ из начального положения $y(0)$ в конечное положение $y(0,5T) = y_{\max}$. При динамическом нагружении пружины 2 грузом 1 ее максимальная деформация (перемещение груза 1 вдоль оси OY) составит

$$y_{\max} = 2(y_{cm} - y(0)) = 2A\,,$$

где $y_{cm} = y(0,25T) = \dfrac{G_1}{c_2}$ – статическая деформация пружины жесткостью c_2 в момент времени $t = 0,25T$; A - амплитуда колебаний (максимальное отклонение груза от положения y_{cm}) [1, 2]. На участке I протяженностью $y_{cm} - y(0)$ груз 1 перемещается с ускорением $\vec{\ddot{y}}(0 \le t < 0,25T) > 0$, при этом $\ddot{y}(0) = \ddot{y}_{\max} = g$, а $\ddot{y}(0,25T) = 0$. В положении статического равновесия $\vec{\dot{y}}_{cm} = \vec{\dot{y}}(0,25T) = \vec{\dot{y}}_{\max}$.

На участке II протяженностью $y_{\max} - y_{cm} = y_{cm} - y(0) = A$ груз 1 перемещается замедленно $\ddot{y}(0,25T \le t < 0,5T) < 0$ до полной остановки в положении $y_{\max}$, где $\left|\ddot{y}(0,5T)\right| = \left|\ddot{y}_{\max}\right| = \ddot{y}(0)$ и $\dot{y}(0,5T) = 0$.

Соответственно перемещение груза 1 на участке I при его движении вертикально вниз (рис. 1, *а*) происходит под действием силы движения $\vec{G}_{1,F}(0 < t < 0,25T) > 0$ и сил сопротивления движению: $\overleftarrow{P}_{12,O}(0 < t < 0,25T) = c_2(y(t) - y(0)) < 0$; $\overleftarrow{\Phi}_{1,O} = -m_1\ddot{y}(0 < t < 0,25T) < 0$. Перемещение груза на участке II происходит под действием сил движения:

$$\vec{G}_{1,F}(0,25T < t < 0,5T) > 0\,;\ \vec{\Phi}_{1,F} = -m_1\ddot{y}(0,25T < t < 0,5T) > 0$$

и силы сопротивления движению $\overleftarrow{P}_{12,O}(0,25T < t < 0,5T) = c_2(y(t) - y(0)) < 0$.

Условие равновесия сил, действующих на груз 1 (выделенного тонкими линиями на рис. 1: *а, б*) в текущем положении на каждом из участков I и II, составят.

Для участка I при $0 < t < 0,25T$:

$$\vec{y}(t) > 0;\ \vec{\ddot{y}}(t) > 0 \ \text{ и } \vec{G}_{1,F} + \overleftarrow{P}_{12,Q} + \overleftarrow{\Phi}_{1,Q} = m_1 g - cy - m_1\ddot{y} = 0\,. \tag{2}$$

Для участка II при $0,25T < t < 0,5T$:

$$\vec{y}(t) > 0\,;\ \overleftarrow{\ddot{y}}(t) < 0 \ \text{ и } \ \vec{G}_{1,F} + \overleftarrow{P}_{12,Q} + \vec{\Phi}_{1,F} = m_1 g - cy + m_1\ddot{y} = 0\,. \tag{3}$$

Из (2) следует уравнение равновесия сил для тела единичной массы, определяющее кинематику свободных колебаний груза на участке I.

$$\ddot{y}(t) + \beta^2 y(t) = g\,, \tag{4}$$

где $\beta = \sqrt{\dfrac{c_2}{m_1}}$ - собственная частота свободных колебаний, период которых

составляет $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$.

Уравнение (3) представляет неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого определяет уравнение [1, 2]

$$y(t) = y_{1,I}(t) + y_{2,I}(t)\,, \tag{5}$$

где $y_{1,I}(t)$ - решение однородного дифференциального уравнения $\ddot{y}_{1,I}(t) = \ddot{y} + \beta^2 y = 0$, которое представляет уравнение

$$y_{1,I}(t) = B\cos(\beta t) + C\sin(\beta t) \ \text{ при } (0 \le t < 0,25T = \frac{\pi}{2\beta})\,, \tag{6}$$

где B и C - произвольные постоянные, значения которых определяют начальные условия (1); $y_{1,II}(t)$ - частное решение уравнения (4).

$$y_{2,I}(t) = y(0) = \frac{g}{\beta^2}\,; \tag{7}$$

В свою очередь для участка II из (3) получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}_1^{/}(t) - \beta^2 y_1^{/}(t) = -g\,, \tag{8}$$

где $\beta = -\sqrt{\dfrac{c_2}{m_1}}$ - собственная частота свободных колебаний, период которых составляет $T = \dfrac{2\pi}{|\beta|}$.

Однородное дифференциальное уравнение для уравнения (8) представляет

$$y_{1,II}(t) = B\cos(-\beta t) - C\sin(-\beta t) \text{ при } (\frac{\pi}{2\beta} \le t \le \frac{\pi}{\beta}) \tag{9}$$

и, соответственно, однородное дифференциальное уравнение (9) при перемещении груза 1 на участке II соответствует однородному дифференциальному уравнению (6) при перемещении груза 1 на участке I, т.к.

$$y_{1,II}(t) = B\cos(-\beta t) - C\sin(-\beta t) = B\cos(\beta t) + C\sin(\beta t) = y_{1,I}(t) \tag{10}$$

Учитывая, что частное решение $y_{2,II}(t) = -\dfrac{g}{\beta^2} = -y_{2,I}(t)$ неоднородного уравнения (8) соответствует частному решению (7) уравнения (4), следует, что принимая значения $\beta = \pm\sqrt{\dfrac{c_2}{m_1}}$ в зависимости от участков перемещении груза при свободных колебаниях, кинематику процесса колебаний будет однозначно описывать неоднородное дифференциальное уравнение, составленное для любого из участков перемещения груза в одном направлении.

Из (5)–(7) получим решение неоднородных дифференциальных уравнений (3), (8) с учетом начальных условий (1)

$$y(t) = \frac{g}{\beta^2}(1 - \cos(\beta t)). \tag{11}$$

Отметим, что в общем случае (рис. 1, *б*) при начальных условиях:

$$0 \le y_1(0) < y_{cm};\ 0 \le \dot{y}(0) < \dot{y}_{1,\max} < \dot{y}_{\max};\ g \ge \ddot{y}_1(0) = \frac{G_{1,F} - P_{12,Q}(0)}{m_1} = g - y_1(0)\beta^2 > 0\ ,. \tag{12}$$

уравнение равновесия сил для тела единичной массы, определяющее кинематику свободных колебаний груза 1 на участке перемещения I будет представлено в виде

$$\ddot{y}(t) + \beta^2 y_1^{/}(t) = g - y(0)\beta^2. \tag{13}$$

Откуда следует

$$y(t) = (\frac{g}{\beta^2} - y(0))(1 - \cos(\beta t)): \tag{14}$$

$$\dot{y}(t) = -(\frac{g}{\beta} - y(0)\beta\sin(\beta t) \tag{15}$$

$$\ddot{y}(t) = -(g - y(0)\beta^2)\cos(\beta t). \tag{16}$$

Анализ уравнений (13)–(16) показывает (рис. 1, *в*). При $y_2(0) \to y_{cm}$ и $A_3 = y_{cm} - y_2(0) \to 0$ правая часть уравнения (13) $g - y_2(0)\beta^2 \to 0$ и можно считать, что свободные колебания груза 1 на пружине растяжения 2, когда амплитуда колебаний $A_2 = y_{cm} - y_2(0) << y_{cm}$ можно описывать однородным дифференциальным уравнением (6) или (8). Соответственно получим [1, 2]:

$$y(t) = A\cos(\beta t); \tag{17}$$

$$\dot{y}(t) = -A\beta\sin(\beta t). \tag{18}$$

$$\ddot{y}(t) = -A\beta^2\cos(\beta t). \tag{19}$$

Выводы. Показано, что в общем виде свободные незатухающие колебания описывает неоднородное дифференциальное уравнение, с учетом изменения знака частоты свободных колебаний на участках движения груза с противоположным направлением ускорения в процессе колебаний.

В условиях, когда величина начального смещения груза относительно его статического положения равновесия намного меньше статической деформации пружины, неоднородное дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаниях с достаточной степенью точности представляет однородное дифференциальное уравнение незатухающих свободных колебаниях.

Список литературных источников

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. – 439с.
2. ДЕН-ГАРТОГ ДЖ. П. Механические колебания / ДЖ. П. ДЕН-ГАРТОГ. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960 – 674с.
3. Dobrov I.V. Development of Scientific Bases of the Dynamics of Machines as a Section of Applied Mechanics / I.V. Dobrov // Procedia Engineering, 2015. – V 129. – P. 863–872.

До питання аналізу рівнянь руху твердого тіла при механічних коливаннях

Добров І.В., Сьомічев А.В.

Анотація. *Залежно від поточного положення вантажу на різних ділянках деформації пружини в процесі коливань величина, яка визначає власну частоту вільних незгасаючих коливань, має протилежні знаки в залежності від зміни напрямку прискорення вантажу на цих ділянках, що дозволяє визначити єдине неоднорідне диференціальне рівняння процесу коливань на різних ділянках руху вантажу . При амплітуді коливань набагато менше статичного положення вантажу, це неоднорідне диференціальне рівняння вироджується в однорідне диференціальне рівняння вільних коливань без загасання.*
Ключові слова: *прикладна механіка; вільні коливання; неоднорідне рівняння коливань.*

On the analysis of the equations of motion of a rigid body with mechanical vibrations

Dobrov I.V., Semichev A.V.

Abstract. *Depending on the current position of the mass in different areas of the spring deformation during the oscillation process the values that determines the natural frequency of free continuous oscillations have opposite signs. It is defined by the change in the direction of acceleration of the mass in these areas, which makes it possible to determine a single inhomogeneous differential equation of the oscillation process in different areas of the movement of the mass. When the oscillation amplitude is much less than the static position of the mass, this inhomogeneous differential equation represents a homogeneous differential equation of free undamped oscillations.*
Keywords: *Applied Mechanics; free oscillations; inhomogeneous equation of oscillation.*