

УДК 539.3

Параметричні коливання п'єзоелектричних в'язкопружних циліндричних панелей з урахуванням деформацій поперечного зсуву

Козлов В.І., Зінчук Л.П.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ, м. Київ, Україна

Анотація. У роботі представлено чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач про параметричні коливання шаруватих шарнірно закріплених п'єзоелектричних в'язкопружних циліндричних панелей при електромеханічному гармонічному навантаженні. Математичну модель побудовано з використанням механічних гіпотез про пошарову апроксимацію деформацій зсуву квадратичними функціями по товщині панелі, які доповнено адекватними гіпотезами щодо розподілу електричних польових величин, коли відмінними від нуля є компоненти вектора напруженості електричного поля та нормальна складова вектора електричної індукції. Дисипативні властивості матеріалів враховуються на основі теорії лінійної в'язкоелектропружності. Для розв'язання поставлених задач розроблено методику, що ґрунтується на використанні варіаційного принципу та представленні шуканих величин у вигляді розкладу у подвійні тригонометричні ряди. Це дає можливість звести розглянуті задачі до рівнянь типу Мат'є-Хілла з врахуванням дисипації енергії, які розв'язуються методом гармонічної лінеаризації, що дозволяє визначити межі областей динамічної нестійкості.

Ключові слова: в'язкоелектропружна циліндрична панель; деформації поперечного зсуву; параметричні коливання; дисипація енергії; області динамічної нестійкості.

У різноманітних технічних галузях знаходять широке застосування тонкостінні конструктивні елементи із композиційних матеріалів, зокрема до складу яких входять і п'єзоелектричні складові. Такі елементи є досить чутливими до різних навантажень, що змінюються в часі. Як відомо, в таких елементах конструкцій періодичні навантаження у серединній площині можуть викликати поперечні коливання, які в свою чергу можуть призвести до параметричного резонансу при певній комбінації параметрів зовнішнього навантаження та власної частоти поперечних коливань.

Розглянемо в загальному випадку тришарову циліндричну оболонку з товщиною $H = h_1 + h_2 + h_3$, складену з трансверсально-ізотропних в'язкопружних п'єзоелектричних шарів з товщиною поляризацією. Оболонка віднесена до криволінійної ортогональної системи координат (s, θ, z) . Як базисну, вибираємо серединну поверхню внутрішнього шару оболонки. Приймається $\sigma_{zz} = 0$ і квадратичний закон зміни зсувних деформацій ε_{sz} і $\varepsilon_{\theta z}$ в межах кожного шару [1]. При цьому зсувні напруження $\sigma_{zs}, \sigma_{z\theta}$ повинні задовольняти умовам контакту між шарами. Меридіан базисної поверхні описується рівнянням $r = r(x)$, де x відраховується вздовж осі обертання. На п'єзоелектричних поверхнях $z = a_0, a_1, a_2, a_3$ нанесено суцільні або дискретні електродні покриття, на яких задаються відповідні значення потенціалів $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Для моделювання електромеханічної поведінки матеріалів використовується концепція комплексних характеристик [2]. Спрощені визначальні рівняння одержуємо на основі вказаних вище уточнених механічних гіпотез, доповнених адекватними їм гіпотезами про розподіл по товщині електричних польових величин, коли вважається, що відмінними від нуля є компоненти вектора напруженості електричного поля E_z, E_s, E_θ і нормальна складова електричної індукції ($D_z \neq 0, D_s = 0, D_\theta = 0$). При цьому спрощені рівняння стану для k -го шару приймають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{ss}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_{ss}^{(k)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} - \gamma_{11}^{(k)} E_z^{(k)}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(k)} = B_{12}^{(k)} \varepsilon_{ss}^{(k)} + B_{11}^{(k)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} - \gamma_{11}^{(k)} E_z^{(k)}, \quad \sigma_{s\theta}^{(k)} = 2G_{12}^{(k)} \varepsilon_{s\theta}^{(k)}, \\ \sigma_{sz}^{(k)} &= 2G_{13}^{(k)} \varepsilon_{sz}^{(k)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(k)} = 2G_{23}^{(k)} \varepsilon_{\theta z}^{(k)}, \quad D_z^{(k)} = \gamma_{33}^{(k)} E_z^{(k)} + \gamma_{11}^{(k)} (\varepsilon_{ss}^{(k)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)}),\end{aligned}\quad (1)$$

де $B_{11}^{(k)} = c_{11}^{E(k)} - (c_{13}^{E(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}$, $B_{12}^{(k)} = c_{12}^{E(k)} - (c_{13}^{E(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}$, $\gamma_{11}^{(k)} = e_{13}^{(k)} - c_{13}^{E(k)} e_{33}^{(k)} / c_{33}^{E(k)}$, $\gamma_{33}^{(k)} = \mu_{33}^{S(k)} + (e_{33}^{(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}$, $G_{12}^{(k)} = c_{11}^{E(k)} - c_{12}^{E(k)}$, $G_{13}^{(k)} = G_{23}^{(k)} = c_{44}^{E(k)} + (e_{15}^{(k)})^2 / \mu_{11}^{S(k)}$, а $c_{ij}^{E(k)}$, $e_{ij}^{(k)}$ – відповідно в’язкопружні та п’єзоелектричні модулі, а μ_{ij}^S – діелектричні проникливості k -го п’єзоелектричного шару [2, 3]. Якщо середній шар ($k = 2$) пасивний, то $e_{ij}^{(2)} = 0$. У рівняннях стану (1) зсувні напруження апроксимуються квадратичними функціями по координаті z . Відповідно до теорії, представленої в [1], в кожному шарі вони можуть бути записані у вигляді:

$$\sigma_{sz}^{(k)} = \sigma_{s3}^{(k)} = G_{13}^{(k)} u_1(s, \theta) q^{(k)}(z), \quad \sigma_{\theta z}^{(k)} = \sigma_{\theta 3}^{(k)} = G_{13}^{(k)} v_1(s, \theta) q^{(k)}(z), \quad (k = 1, 2, 3).$$

Функції $u_1(s, \theta)$, $v_1(s, \theta)$ знаходяться з розв’язку задачі для всього пакету шарів, а $\sigma_{sz}^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)}$, $\sigma_{\theta z}^{(k)} = \sigma_{23}^{(k)}$ знаходяться шляхом інтегрування рівнянь рівноваги. Поперечні зсувні деформації для кожного шару знаходяться з рівнянь стану (1)

$$\varepsilon_{sz}^{(k)} = \varepsilon_{13}^{(k)} = \frac{1}{2} u_1(s, \theta) q^{(k)}(z), \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k)} = \varepsilon_{23}^{(k)} = \frac{1}{2} v_1(s, \theta) q^{(k)}(z).\quad (2)$$

В подальшому будемо розглядати такі оболонки, для яких можна знехтувати z/R у порівнянні з 1 (R – радіус циліндричної оболонки). У цьому випадку, наприклад, для тришарової оболонки симетричної будови, коли

$$B_{11}^{(1)} = B_{11}^{(3)}, \quad G_{13}^{(1)} = G_{13}^{(3)}, \quad G_{23}^{(1)} = G_{23}^{(3)}, \quad a_3 = -a_0, \quad a_2 = -a_1,$$

апроксимуючі функції $q^{(k)}(z)$ ($k = 1, 2, 3$) можна записати у вигляді:

$$q^{(1)}(z) = \frac{B_{11}^{(1)}}{2G_{13}^{(1)}} \left(1 - \frac{z^2}{a_0^2} \right), \quad q^{(3)}(z) = q^{(1)}(z), \quad q^{(2)}(z) = \frac{B_{11}^{(2)}}{2G_{13}^{(2)}} \left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{z^2}{a_0^2} + \frac{B_{11}^{(1)}}{B_{11}^{(2)}} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) \right).$$

Використовуючи співвідношення Коші, після інтегрування виразів (2) по товщині компоненти вектора зміщень запишемо у вигляді:

$$u^{(k)} = u_0 - \frac{\partial w}{\partial s} z + u_1 f^{(k)}(z), \quad v^{(k)} = v_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} z + v_1 f^{(k)}(z),\quad (3)$$

де u_0 , v_0 – тангенціальні зміщення базової поверхні $z = 0$, w – нормальний прогин оболонки, а функції $f^{(k)}(z)$ наведено в [3].

З використанням залежностей (3) і співвідношень Коші знаходяться компоненти тензора деформацій k -го шару відповідно до нелінійної теорії тонкостінних елементів Кармана [4]. На основі вказаних вище гіпотез відносно компонент вектора індукції також легко знайти представлення для D_z [3].

Розв’язок задачі про коливання оболонки при дії на неї механічного і електричного навантаження знаходиться з використанням тривимірного варіаційного рівняння [2,3]

$$\delta E = 0, \quad E = \frac{1}{2} \iiint_V \left(c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - 2e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \mu_{ij}^s E_i E_j + \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} u_i + \zeta \frac{\partial u_i}{\partial t} u_i \right) dV - \iint_S P_i u_i ds, \quad (4)$$

де P_i – компоненти вектора поверхневого навантаження, ρ – густина матеріалу, ζ – коефіцієнт демпфування, який обчислюється через комплексні характеристики в’язкоелектропружного матеріалу.

Розглянемо задачу про параметричні коливання тришарової циліндричної панелі радіуса R з шарнірно закріпленими торцями і введемо позначення $x = s$ ($0 \leq x \leq a$), $y = R\theta$ ($0 \leq y \leq b$). Вважаємо, що панель затиснута рівномірно розподіленими по контуру зусиллями:

$$N_{xx} = -N_{xx}^0 - N_{xx}^1 \cos \eta t, \quad N_{yy} = -N_{yy}^0 - N_{yy}^1 \cos \eta t, \quad N_{xy} = 0,$$

а на електродованих поверхнях оболонки задаються нульові значення потенціалів.

Враховуючи граничні умови для шарнірно закріпленої циліндричної панелі, розв'язок варіаційної задачі (4) шукається у вигляді подвійних рядів Фур'є виду [3]

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(t) \sin(k_m x) \sin(p_n y), \quad \dots, \quad v_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^1(t) \sin(k_m x) \cos(p_n y),$$

де $k_m = m\pi/a$, $p_n = n\pi/b$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$).

У підсумку для визначення коефіцієнтів розкладу $w_{mn}(t)$ одержимо рівняння Мат'є-Хілла

$$\rho_1 \frac{\partial^2 w_{mn}(t)}{\partial t^2} + \zeta_1 \frac{\partial w_{mn}(t)}{\partial t} + \left[D_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2 + \frac{(C_{11}^2 - C_{12}^2)k_m^4}{R^2 C_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2} - \frac{D_{11}^z(k_m^2 + p_n^2)^3}{D_{11}^\delta(k_m^2 + p_n^2) + C_{44}} \right] w_{mn}(t) - (N_{xx} k_m^2 + N_{yy} p_n^2) w_{mn}(t) = 0. \quad (5)$$

При цьому для обчислення частот власних коливань панелі отримаємо формулу

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho_1} \left[D_{11}(p_n^2 + k_m^2)^2 + \frac{(C_{11}^2 - C_{12}^2)k_m^4}{R^2 C_{11}(p_n^2 + k_m^2)^2} - \frac{(D_{11}^z)^2(k_m^2 + p_n^2)^3}{D_{11}^\delta(k_m^2 + p_n^2) + C_{44}} \right], \quad (6)$$

а рівняння статичної стійкості матиме вигляд

$$D_{11}(p_n^2 + k_m^2)^2 + \frac{(C_{11}^2 - C_{12}^2)k_m^4}{R^2 C_{11}(p_n^2 + k_m^2)^2} - \frac{D_{11}^z(k_m^2 + p_n^2)^3}{D_{11}^\delta(k_m^2 + p_n^2) + C_{44}} = N_{xx}^0 k_m^2 + N_{yy}^0 p_n^2. \quad (7)$$

Зауважимо, що в формулах (5)–(7) ρ_1 , ζ_1 , D_{11} , D_{11}^z , D_{11}^δ , C_{ij} виражаються через фізико-механічні параметри шарів панелі [3].

Якщо деформації зсуву не враховуються ($u_1 = v_1 = 0$), маємо розв'язок, який відповідає класичній теорії Кірхгофа-Лява. Аналогічно до наведеного вище також отримано розв'язок задачі для циліндричної панелі у випадку, коли використовується п'ятимодальна теорія С.П.Тимошенка.

Для випадку, коли панель затиснута рівномірно розподіленими по контуру зусиллями

$$N_{xx} = -N_{xx}^0 - N_{xx}^1 \cos \eta t, \quad N_{yy} = 0, \quad N_{xy} = 0, \quad (8)$$

рівняння (5) можна записати у вигляді

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df(t)}{dt} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \eta t) f(t) = 0. \quad (9)$$

де $\varepsilon = \omega_{mn} \zeta_1$, $\mu = \frac{N_{xx}^1}{2(N_{xx}^{kp} - N_{xx}^0)}$, $\Omega^2 = (\omega_{mn})^2 \left(1 - \frac{N_{xx}^0}{N_{xx}^{kp}} \right)$, $f(t) = w_{mn}(t)$. При цьому N_{xx}^{kp} є розв'язком рівняння стійкості і має вигляд

$$N_{xx}^{kp} = \frac{1}{k_m^2} \left[D_{11}(p_n^2 + k_m^2)^2 + \frac{(C_{11}^2 - C_{12}^2)k_m^4}{R^2 C_{11}(p_n^2 + k_m^2)^2} - \frac{(D_{11}^z)^2(k_m^2 + p_n^2)^3}{D_{11}^\delta(k_m^2 + p_n^2) + C_{44}} \right].$$

Визначення областей динамічної нестійкості є однією з основних задач теорії параметричних коливань. Застосовуючи підхід Болотіна В. В. [4], отримано наближені формули, що визначають межі областей динамічної нестійкості і розраховано області динамічної нестійкості для різних значень декременту дисипації $\Delta = 2\pi\varepsilon/\omega_{mn}$, частоти навантаження η , коефіцієнта збудження μ .

Розрахунки проводились у випадку заданих зусиль виду (8) для тришарових циліндричних панелей. Внутрішній шар панелі виготовлений із трансверсально-ізотропного матеріалу з наступними механічними характеристиками:

$E_{xx} = E_{yy} = 2,5 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $E_{zz} = 0,5 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\nu_{xy} = 0,3$, $\nu_{xz} = \nu_{yz} = 0,25$,
 $G_{xy} = 0,12 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\rho = 0,2 \times 10^4 \text{ кг/м}^3$, $G_{xz} = G_{yz} = 0,33 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$. Фізико-механічні параметри зовнішніх в'язкопружних п'єзоелектричних шарів наведені у роботі [3].

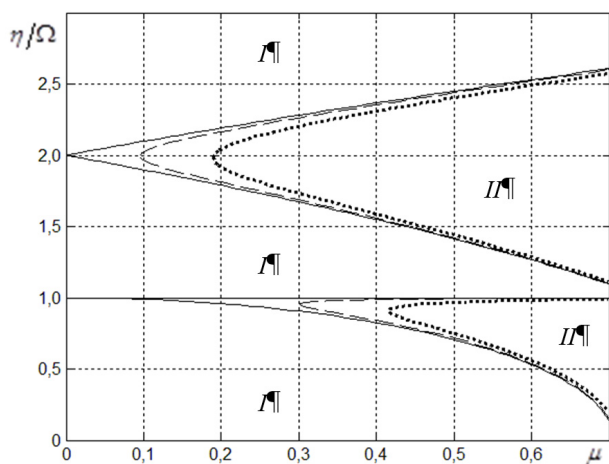


Рис.1. Межі областей нестійкості при різних значеннях декременту дисипації

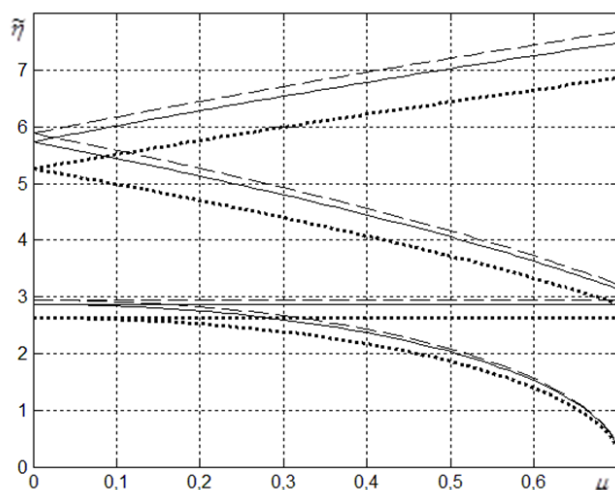


Рис.2. Межі зон нестійкості для різних математичних моделей циліндричної панелі

Розглядалися циліндричні панелі з такими геометричними параметрами:

1) $H = 0,001 \text{ м}$, $h_1 = h_3 = 0,00025 \text{ м}$, $h_2 = 0,0005 \text{ м}$, $R = 0,1 \text{ м}$, $a = 0,1 \text{ м}$, $b = 0,1 \text{ м}$; 2) $H = 0,01 \text{ м}$, $h_1 = h_3 = 0,0025 \text{ м}$, $h_2 = 0,005 \text{ м}$, $R = 0,1 \text{ м}$, $a = 0,1 \text{ м}$, $b = 0,1 \text{ м}$.

На рис. 1 для тонкої циліндричної панелі у випадку $H/R = 0,01$ в області зміни параметрів η/Ω і μ представлено межі 2-х перших зон нестійкості при різних значеннях декременту дисипації Δ : $\Delta = 0$ (суцільні лінії), $\Delta = 0,3$ (штрихові лінії), $\Delta = 0,6$ (пунктирні лінії) з використанням зсувних гіпотез. При цьому знайдена частота основного резонансу була $\omega = 0,159 \times 10^5 \text{ рад/с}$. На рис. 1 області стійкості позначено через I, а області нестійкості через II. Як видно з рис. 1, при збільшенні декременту дисипації Δ межі областей нестійкості зміщуються вправо від осі ординат. Таким чином, дисипація енергії робить неможливим виникнення параметричного резонансу при невеликих значеннях коефіцієнта збудження μ .

На рис. 2 показані межі областей нестійкості при $\Delta = 0$ у випадку використання класичних гіпотез Кірхгофа-Лява (штрихові лінії), гіпотез типу Тимошенка (суцільні лінії) та наведених у цій роботі зсувних гіпотез (пунктирні лінії) для циліндричної панелі

середньої товщини ($H/R = 0,1$). При цьому для згаданих вище гіпотез були обраховані відповідно наступні частоти основного резонансу ω : $\omega_{\text{KL}} = 0,295 \times 10^5$ рад/с, $\omega_{\text{T}} = 0,287 \times 10^5$ рад/с, $\omega_{\text{S}} = 0,263 \times 10^5$ рад/с. На рис. 2 уведено позначення $\tilde{\eta}$ таким чином, що частота збудження коливань представляється як $\eta = \tilde{\eta} \times 10^4$ рад/с.

Зазначимо, що у випадку досить тонкої циліндричної панелі ($H/R = 0,01$) розрахунки, що отримано при використанні різних механічних гіпотез, практично збігаються з суцільними кривими рис. 1 і тому окремо не представлені. Як показали чисельні дослідження, зі збільшенням товщини панелі межі областей нестійкості, розраховані з використанням різних теорій, відрізняються суттєвіше. Особливо це стосується головної області нестійкості. При урахуванні деформацій зсуву відбувається зміщення меж областей у бік низьких частот, що зумовлено в першу чергу похибкою при обчисленні найнижчої власної частоти згинних коливань панелі.

Список літератури

1. Рассказов А.О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга. – К.: Вища школа. –1986. –191 с.
2. Карнаухов В.Г. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел / В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.
3. Карнаухов В.Г. Влияние деформаций зсува на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок / В.Г.Карнаухов, В.И. Козлов, Т.В. Карнаухова // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – № 94. – С. 75–95.
4. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем – М: Гостехиздат, 1956. – 595 с.

Parametric vibrations of piezoelectric viscoelastic cylindrical panels taking into account transverse shear deformations

Kozlov Volodymyr, Zinchuk Liubov

Abstract. The paper presents a numerical-analytical approach to solving problems of parametric vibrations of layered hinged piezoelectric viscoelastic cylindrical panels under electromechanical harmonic loading. The mathematical model is constructed using mechanical hypotheses about layer-by-layer approximation of shear deformations by quadratic functions on the thickness of panel, which are supplemented by adequate hypotheses on the distribution of electric field quantities when the components of the electric field strength vector and the normal component of the electric induction vector are different from zero. The dissipative properties of materials are taken into account on the basis of the theory of linear viscoelectric elasticity. To solve the problems, a technique based on the use of the variation principle and the representation of the required quantities in the form of decomposition into double trigonometric series has been developed. This makes it possible to reduce the considered problems to Mathieu-Hill-type equations taking into account energy dissipation, which are solved by the method of harmonic linearization, which allows to determine the boundaries of the regions of dynamic instability.

Keywords: viscoelectroelastic cylindrical panel; transverse shear deformations; parametric vibrations; energy dissipation; areas of dynamic instability.