УДК 539.3

Осьовий розтяг нелінійно-пружних композитних оболонок нульової гауссової кривини з прямокутним отвором

Сторожук Є.А., Максимюк В.А., Чернишенко І.С., Корнієнко В.Ф.
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Анотація. *Дано постановку фізично нелінійних задач для композитних оболонок нульової гауссової кривини, ослаблених прямокутним отвором, при дії осьового навантаження. Вихідними є рівняння теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа–Лява. Геометричні співвідношення записані в векторній формі, а фізичні – на основі деформаційної теорії пластичності для анізотропних матеріалів. Система розв'язувальних рівнянь отримана з варіаційного принципу Лагранжа. Розроблена методика чисельного розв'язання двовимірних фізично нелінійних задач для ортотропних композитних оболонок даного виду, яка базується на використанні методу додаткових напружень і методу скінченних елементів. Запропоновано варіант методу скінченних елементів, особливість якого полягає в векторній апроксимації шуканих величин і дискретному виконанні геометричної частини гіпотез Кірхгофа–Лява (у вузлах скінченних елементів). За допомогою розробленої методики досліджено нелінійно-пружний стан органопластикової конічної оболонки з прямокутним отвором, яка на торцях підкріплена шпангоутами і навантажена рівномірно розподіленими розтягувальними зусиллями.*

Ключові слова: оболонка нульової гауссової кривини; прямокутний отвір; ортотропний матеріал; осьовий розтяг; метод скінченних елементів; метод додаткових напружень.

Розглянемо тонку оболонку нульової гауссової кривини, виготовлену з ортотропного композитного матеріалу (КМ) і ослаблену прямокутним отвором. Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, лінії α_1, α_2 якої спряжені з лініями головних кривин. Вважаємо, що при підвищених рівнях діючого крайового (осьового) навантаження властивості матеріалу оболонки описуються нелінійними діаграмами деформування.

Геометричні співвідношення представимо у векторній формі на основі теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа–Лява [1, 2]:

$$\varepsilon_{11} = \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_{22} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad \varepsilon_{12} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2};$$
$$\mu_{11} = \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \mu_{22} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad 2\mu_{12} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \tag{1}$$
$$e_{11} = \varepsilon_{11} + \gamma\mu_{11}; \quad e_{22} = \varepsilon_{22} + \gamma\mu_{22}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma\mu_{12},$$

де A_1, A_2 – параметри Ламе; $\vec{u} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ – орти системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$; $\vec{\varphi} = \varphi_1\vec{e}_1 + \varphi_2\vec{e}_2$ – вектор кутів повороту нормалі: $\varphi_1 = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}$; $\varphi_2 = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2}$.

Припускаючи, що навантаження просте, скористаємося нелінійними фізичними співвідношеннями деформаційної теорії пластичності анізотропних середовищ, у якій прийнята умова пластичності виду [3]:

$$f = \frac{1}{2}(q_{1111}\sigma_{11}^2 + q_{2222}\sigma_{22}^2 + 2q_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 4q_{1212}\sigma_{12}^2) = f_s. \tag{2}$$

Тут f_s – додатна матеріальна константа.

Також вважаємо, що матеріал зміцнюється тільки тоді, коли виконується робота пластичних деформацій

$$W_p = \int_0^{e_{11}^p} \sigma_{11} de_{11}^p + \int_0^{e_{22}^p} \sigma_{22} de_{22}^p + \int_0^{e_{12}^p} \sigma_{12} de_{12}^p\ , \tag{3}$$

тобто $f = f(W_p)$ та $W_p = W_p(f)$ при $f \geq f_s$.

Залежності між компонентами напружень і деформацій при плоскому напруженому стані у випадку збігу напрямків ортотропії матеріалу з напрямками осей координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ мають вигляд [3]:

$$e_{11} = \left(\frac{1}{E_{11}} + \Psi q_{1111}\right)\sigma_{11} + \left(-\frac{\nu_{12}}{E_{22}} + \Psi q_{1122}\right)\sigma_{22}; \tag{4}$$

$$e_{22} = \left(-\frac{\nu_{21}}{E_{11}} + \Psi q_{2211}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_{22}} + \Psi q_{2222}\right)\sigma_{22}; \qquad e_{12} = \left(\frac{1}{G_{12}} + 4\Psi q_{1212}\right)\sigma_{12}\,,$$

де $E_{11}, E_{22}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$ – пружні сталі композита; $q_{1111}, q_{2222}, q_{1122}, q_{1212}$ – компоненти тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей КМ; $\Psi(f)$ – функція, яка описує нелінійне деформування матеріалу.

На основі експериментальних даних отримані такі вирази для $W_p(f)$ і $\Psi(f)$ [3]:

$$W_p = \begin{cases} 0, \ f/f_s \leq 1; \\ c[(f/f_s)^n - 1], \ f/f_s > 1; \end{cases} \qquad \Psi = \frac{cn}{(2n-1)f_s}\left[\left(\frac{f}{f_s}\right)^{n-1} - \sqrt{\frac{f_s}{f}}\right].$$

Методика розв'язання задач статики для композитних оболонок, ослаблених прямокутним отвором, з врахуванням фізичної нелінійності базується на використанні методу Ньютона, методу додаткових напружень і методу скінченних елементів (МСЕ).

Фізичні співвідношення (4) є суттєво нелінійними й нерозв'язними аналітично відносно напружень. Розв'яжемо нелінійну систему (4) відносно напружень методом Ньютона, вибираючи за початкове наближення напруження для лінійно-пружного тіла.

Після чисельного обернення рівнянь (4) відносно напружень будемо мати залежності виду

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(e_{11}, e_{22}, e_{12}); \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(e_{11}, e_{22}, e_{12}); \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(e_{11}, e_{22}, e_{12}). \tag{5}$$

Представимо вирази для напружень (5) у вигляді суми лінійних $\left(\sigma_{ij}^0\right)$ і нелінійних $\left(\sigma_{ij}^H\right)$ доданків:

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^H; \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^H; \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \sigma_{12}^H; \\ \sigma_{11}^0 = c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22}; \quad \sigma_{22}^0 = c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22}; \quad \sigma_{12}^0 = c_{33}e_{12}; \\ \sigma_{11}^H = \sigma_{11} - \sigma_{11}^0; \quad \sigma_{22}^H = \sigma_{22} - \sigma_{22}^0; \quad \sigma_{12}^H = \sigma_{12} - \sigma_{12}^0; \\ c_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{21} = c_{12} = \frac{E_{11}\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{33} = G_{12}. \end{gathered} \tag{6}$$

Систему розв'язувальних рівнянь отримаємо з варіаційного рівняння Лагранжа

$$\iint_\Sigma \delta\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} d\Sigma = \delta A_p - \iint_\Sigma \delta\{\varepsilon\}^T \left\{m^H\right\} d\Sigma\,. \tag{7}$$

Тут $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12},\mu_{11},\mu_{22},2\mu_{12}\}^T$ – вектор компонентів деформації оболонки; $[D]$ – матриця жорсткостей; $\{m^H\}$ – вектор нелінійних доданків у виразах для внутрішніх зусиль і моментів; A_p – робота осьових сил; Σ – серединна поверхня оболонки.

Методом додаткових напружень вихідна фізично нелінійна задача (7) зводиться до послідовності лінійно-пружних задач, які розв'язуються модифікованим МСЕ. Особливість запропонованого варіанту МСЕ полягає в векторній формі апроксимації шуканих величин і дискретному виконанні геометричної частини гіпотез Кірхгофа–Лява [2, 4].

З рівняння Лагранжа (7) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, яка моделює нелінійно-пружне деформування композитної конічної оболонки, ослабленої прямокутним отвором:

$$[K]\{U\}=\{P\}-\{\Omega\}, \tag{8}$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості лінійно-пружної оболонки; $\{U\}$, $\{P\}$, $\{\Omega\}$ – глобальні вектори вузлових ступенів свободи, навантажень і нелінійностей.

Як числовий приклад, розв'яжемо нелінійну крайову задачу для зрізаної конічної оболонки товщини h, висоти H і радіусами верхньої та нижньої основ r_1 і r_2 $(r_1<r_2)$, яка розтягується розподіленими по її торцях осьовими зусиллями P_1 і P_2 ($P_k/h=\tilde{P}_k/h\cdot 10^5$ Па) (рис. 1). Оболонка має прямокутний отвір розмірами $a\times b$ та верхній і нижній шпангоути ширини $l_{шп}$ й висоти $h_{шп}$. Віднесемо серединну поверхню оболонки до криволінійної ортогональної системи координат (l,ϑ) з початком у вершині конуса.

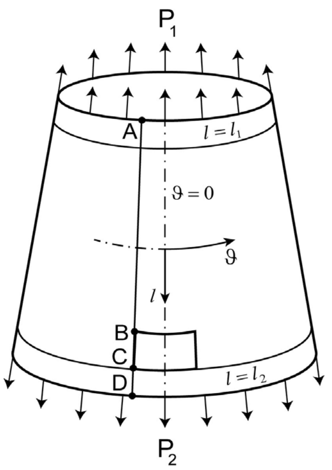

Рис. 1. Підкріплена конічна оболонка з прямокутним отвором

Оболонка і шпангоути виготовлені з ортотропного органопластика з такими фізико-механічними параметрами:

$$E_{11}=25{,}3\,\text{ГПа};\quad E_{22}=38{,}4\,\text{ГПа};\quad G_{12}=7{,}6\,\text{ГПа};$$
$$\nu_{12}=0{,}238;$$
$$q_{1111}=4{,}2\,;\quad q_{2222}=2{,}0\,;\quad q_{1122}=0{,}33\,;\quad q_{1212}=13{,}0\,;$$
$$c=0{,}137\,\text{МПа};\quad n=3\,;\quad f_s=0.4\cdot 10^6\,\text{МПа}.$$

Конкретні числові результати розв'язання лінійних (ЛЗ) і нелінійних (НЗ) задач отримані для осьових зусиль інтенсивності $\tilde{P}_2/h=1000$ та $\tilde{P}_1/h=\tilde{P}_2/h\cdot r_2/r_1$ і таких значень геометричних параметрів оболонки і шпангоутів:

$$H=4014\,;\quad h=27\,;\quad r_1=1500\,;\quad r_2=1990\,;\quad a=400\,;\quad b=300\,;\quad l_{шп}=250\,;\quad h_{шп}=0{,}5h\,.$$

Тут лінійні розміри наведені в мм.

На рис. 2 показано розподіл безрозмірних осьових напружень $\tilde{\sigma}_l=\sigma_l h/P_2$, одержаних у результаті розв'язання ЛЗ і НЗ, уздовж перерізу AD для непідкріпленої (штрихові криві) і підкріпленої (суцільні криві) оболонок, де $\tilde{l}=(l-l_1)/(l_2-l_1)$.

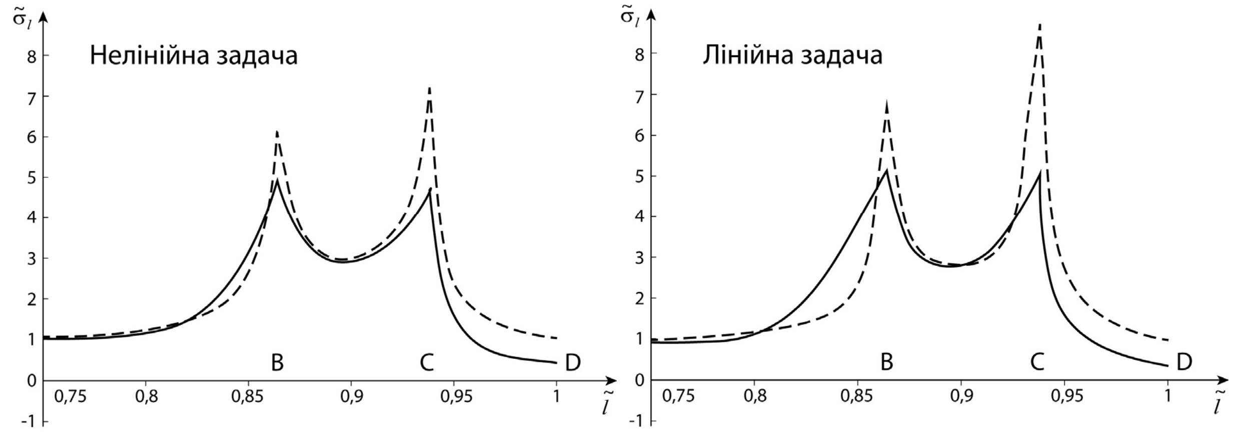

Рис. 2. Розподіл осьових напружень уздовж перерізу AD

Із представлених результатів випливає, що підкріплення оболонки шпангоутами призводить до зменшення максимальних напружень на 37,7% для ЛЗ і на 27,6% для НЗ. Врахування нелінійних властивостей матеріалу у випадку підкріпленої оболонки зменшує максимальні напруження на 5%, що значно менше, ніж для непідкріпленої оболонки (18,3%).

Список літератури

1. Гузь А.Н. Методы расчета оболочек. Т.1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов, Вик.Н. Чехов, К.И. Шнеренко. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. Guz A.N. Physically and Geometrically Nonlinear Static Problems for Thin-Walled Multiply Connected Shells / A.N. Guz, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 6. – P. 679–687.
3. Ломакин В.А. О теории пластичности анизотропных сред // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1964 – № 4 – С. 49–53.
4. Areias P.M.A. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints / P.M.A. Areias, J.-H. Song, T. Belytschko // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2005. – 64, № 9. – P. 1166–1206.

Axial tension of nonlinear elastic composite shells of zero Gaussian curvature with a rectangular hole

Storozhuk Eugene; Maksimyuk Volodymyr; Chernyshenko Ivan; Korniienko Viktoriia

The formulation of physically nonlinear problems for composite shells of zero Gaussian curvature weakened by a rectangular hole under the action of axial loading is given. The initial equations are the equations of the theory of non-sloping shells, in which the Kirchhoff–Love hypotheses take place. Geometric relationships are written in vector form, and physical relationships are based on the deformation theory of plasticity for anisotropic materials. The system of resolving equations is obtained from the Lagrange variational principle. A technique has been developed for the numerical solution of two-dimensional physically nonlinear problems for orthotropic composite shells of this type, based on the use of the method of additional stresses and the method of finite elements. A variant of the finite element method is proposed, the peculiarity of which lies in the vector approximation of the sought values and the discrete execution of the geometric part of the Kirchhoff–Love hypotheses (at the nodes of finite elements). Using the developed technique, the nonlinear elastic state of an organoplastic conical shell with a rectangular hole, which at the ends is reinforced with frames and loaded with uniformly distributed tensile forces, has been investigated.

Keywords: shell of zero Gaussian curvature; rectangular hole; orthotropic material; axial tension; finite element method; method of additional stresses.