

УДК 621.873

СТІЙКІСТЬ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МОСТОВИХ КРАНІВ

Неженцев О.Б.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

Анотація: Викладено методику і проведено дослідження стійкості математичних моделей, які описують рух вантажопідіймальних кранів. Розглянуто тримасова і чотиримасова динамічні моделі мостових кранів, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями і застосовуються для аналізу і синтезу перехідних процесів в режимах пусків і гальмувань. Дослідження стійкості зазначених математичних моделей, що інтегруються чисельним методом Рунге-Кутти, здійснювалося за допомогою критерію Гурвіца. Наведено результати перевірки стійкості три- та чотиримасових моделей, що описують рух мостового крана вантажопідіймністю 20 т.

Ключові слова: мостовий кран, математична модель, чисельний метод інтегрування, стійкість, критерій Гурвіца

При дослідженні перехідних процесів вантажопідіймальних кранів, як правило, використовують багатомасові динамічні моделі [1-3 та ін.], що описуються нелінійними диференціальними рівняннями, які інтегрують чисельними методами.

Досвід дослідження перехідних процесів кранів показує, що при деяких значеннях коефіцієнтів диференціальних рівнянь мають місце нестійкі результати чисельного інтегрування (наприклад, безперервно зростаючі коливання навантажень, швидкостей і т.д. з амплітудами, які в багато разів перевищують реальні величини). На рис. 1 показано приклад нестійкого процесу розгону мостового крана вантажопідіймністю 20 т, представлено чотиримасовою моделлю.

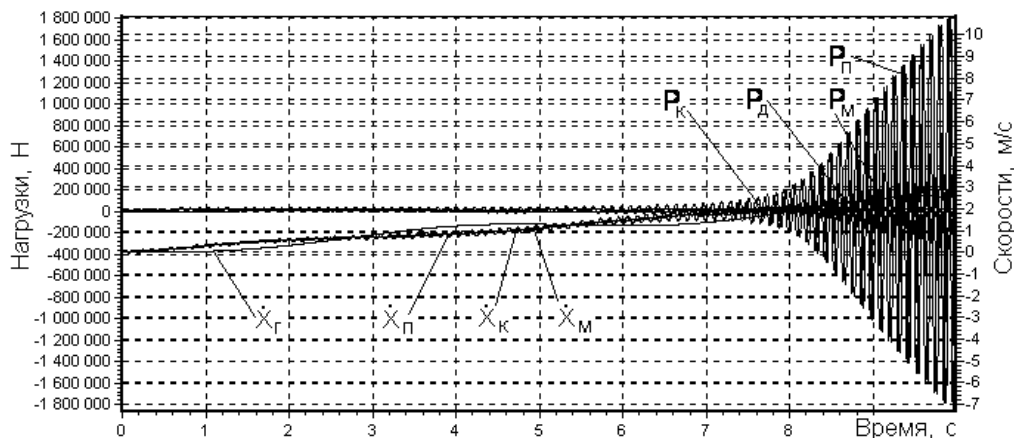


Рис. 1. Нестійкий процес розгону чотиримасової моделі мостового крана в/п 20т

Оскільки використання нестійких рішень, може привести до помилкових висновків, то необхідна перевірка багатомасових моделей кранів на стійкість. Разом з тим, аналіз літератури показує, що в численних дослідженнях динаміки вантажопідіймальних кранів часто застосовуються багатомасові моделі без попередньої перевірки на стійкість [4, 5 та ін.].

Мета роботи: дослідити стійкість три- та чотиримасової моделей, що описують рух мостових кранів:

- для тримасової моделі мостового крана

$$\begin{aligned} m_K \ddot{x}_K + C_D(\dot{x}_K - \dot{x}_M) + C_M(x_K - x_M) + P_w \text{sign}(\dot{x}_K) &= P_D; \\ m_M \ddot{x}_M + C_K(x_M - x_G) - C_D(\dot{x}_K - \dot{x}_M) - C_M(x_K - x_M) &= 0; \\ m_G \ddot{x}_G + C_K(x_M - x_G) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

- для чотиримасової моделі мостового крана

$$\begin{aligned} m_{\Pi} \ddot{x}_{\Pi} + C_{D1}(\dot{x}_{\Pi} - \dot{x}_K) + C_{\Pi}(x_{\Pi} - x_K) &= P_d; \\ m_K \ddot{x}_K + C_D(\dot{x}_K - \dot{x}_M) + C_M(x_K - x_M) - C_{D1}(\dot{x}_{\Pi} - \dot{x}_K) - C_{\Pi}(x_{\Pi} - x_K) + P_w \operatorname{sign}(\dot{x}_K) &= 0; \quad (2) \\ m_M \ddot{x}_M + C_K(x_M - x_{\Gamma}) - C_D(\dot{x}_K - \dot{x}_M) - C_M(x_K - x_M) &= 0; \\ m_{\Gamma} \ddot{x}_{\Gamma} + C_K(x_M - x_{\Gamma}) &= 0, \end{aligned}$$

де всі позначення загальноприйняті та наведені в роботах [2, 6, 7].

Після лінеаризації зведеної до ходових коліс сили приводу P_d і перепозначенні змінних ($x_K = x_1$, $x_M = x_2$, $x_{\Gamma} = x_3$, $\dot{x}_K = \dot{x}_1 = x_4$, $\dot{x}_M = \dot{x}_2 = x_5$, $\dot{x}_{\Gamma} = \dot{x}_3 = x_6$) відповідна системі диференціальних рівнянь (1) однорідна система буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6; \\ \dot{x}_2 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6; \\ \dot{x}_3 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6; \\ \dot{x}_4 &= -\frac{C_M}{m_K}x_1 + \frac{C_M}{m_K}x_2 + 0x_3 - \frac{C_D+E_j}{m_K}x_4 + \frac{C_D}{m_K}x_5 + 0x_6; \quad (3) \\ \dot{x}_5 &= \frac{C_M}{m_M}x_1 - \left(\frac{C_M}{m_M} + \frac{C_K}{m_M}\right)x_2 + \frac{C_K}{m_M}x_3 + \frac{C_D}{m_M}x_4 - \frac{C_D}{m_M}x_5 + 0x_6; \\ \dot{x}_6 &= 0x_1 + \frac{C_K}{m_{\Gamma}}x_2 - \frac{C_K}{m_{\Gamma}}x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6. \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння для тримасової моделі:

$$\begin{aligned} \lambda^6 + \left(\frac{C_D}{m_M} + \frac{C_D+E_j}{m_K}\right)\lambda^5 + \left(\frac{C_M}{m_K} + \frac{C_M+C_K}{m_M} + \frac{C_K}{m_{\Gamma}} + \frac{C_DE_j}{m_M m_K}\right)\lambda^4 + \left(\frac{C_K C_D + (C_M+C_K)E_j}{m_M m_K} + \frac{C_K C_D}{m_{\Gamma} m_M} + \frac{C_K(C_D+E_j)}{m_{\Gamma} m_K}\right)\lambda^3 + \\ + \left(\frac{C_M C_K}{m_M m_K} + \frac{C_K C_M}{m_{\Gamma} m_K} + \frac{C_K C_M}{m_M m_{\Gamma}} + \frac{C_K C_DE_j}{m_{\Gamma} m_M m_K}\right)\lambda^2 + \frac{C_K C_M E_j}{m_{\Gamma} m_M m_K}\lambda + 0\lambda^0 = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Матриця Гурвіца для тримасової моделі має вигляд:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $a_0 = 1$; $a_1 = \frac{C_D}{m_M} + \frac{C_D+E_j}{m_K}$; $a_2 = \frac{C_M}{m_K} + \frac{C_K+C_M}{m_M} + \frac{C_K}{m_{\Gamma}} + \frac{C_DE_j}{m_K m_M}$; $a_3 = \frac{C_K C_M E_j}{m_K m_M m_{\Gamma}}$; $a_6 = 0$;

$$a_3 = \frac{C_K C_D + (C_K+C_M)E_j}{m_K m_M} + \frac{C_K C_D}{m_M m_{\Gamma}} + \frac{C_K(C_D+E_j)}{m_K m_{\Gamma}}; \quad a_4 = \frac{C_K C_M}{m_K m_M} + \frac{C_K C_M}{m_K m_{\Gamma}} + \frac{C_K C_M}{m_M m_{\Gamma}} + \frac{C_K C_DE_j}{m_K m_M m_{\Gamma}}.$$

Визначники Гурвіца для тримасової моделі:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_4 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = -(a_3^2 - a_1 a_2 a_3 - a_1 a_5 + a_1^2 a_4);$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_3 a_5 - a_1 a_2^2 a_5 - a_5^2 + a_1 a_4 a_5 - a_3^2 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_4 a_5 - a_1^2 a_4^2;$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} = a_2 a_3 a_5^2 - a_1 a_2^2 a_5^2 - a_5^3 + a_1 a_4 a_5^2 - a_3^2 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_4 a_5^2 - a_1^2 a_4^2 a_5;$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки коефіцієнти системи рівнянь (1) - позитивні величини, то і визначники Гурвіца $\Delta_1 \dots \Delta_5$ також більше нуля. Але визначник Δ_6 дорівнює нулю, що говорить про знаходження системи (1) на кордоні стійкості і вона не є асимптотично стійкою, а відноситься до нейтрально стійкої.

Також виконано аналіз стійкості чотиримасової моделі мостового крана, для якої було одержано аналогічні результати.

Висновки:

- використання багатомасових моделей кранів без попередньої перевірки на стійкість може привести до помилкових результатів досліджень. Наприклад, розглянуті тримасова і чотиримасова моделі, не є асимптотично стійкими, а можуть бути нейтрально стійкими, тобто вони можуть застосовуватися для дослідження перехідних процесів мостових кранів тільки після перевірки на стійкість з певними для кожного крана коефіцієнтами диференціальних рівнянь;

- збільшення числа мас в моделі крана зменшує запас її стійкості, тому моделі, що мають більше п'яти мас, як правило, нестійкі при деяких значеннях коефіцієнтів рівнянь. При збільшенні числа мас в моделі зростає ступінь характеристичного рівняння (для чотиримасової моделі - 8-а, для п'ятимасової - 10-а) і - трудомісткість дослідження моделі на стійкість;

- врахування в багатомасових моделях механічних характеристик електроприводу крана на робочих ділянках збільшує запас стійкості моделі, оскільки двигун в цьому випадку є демпфером коливань, а на неробочих ділянках характеристик (наприклад, на початку розгону по природній характеристиці) - зменшує запас стійкості.

Список літератури:

1. Ловейкін В.С. Динаміка машин / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич – К.: ЦП „КОМПРИНТ”, 2013. – 227 с.
2. Лобов Н.А. Динаміка грузопідъемних кранов / Н.А. Лобов. - М.: Машиностроение, 1987. - 160 с.
3. Григоров О.В. Оптимальне керування рухом механізмів вантажопідйомних машин / О.В. Григоров, В.С. Ловейкін. – К.: ІЗМН, 1997. – 264 с.
4. Шевченко А.Ф. Динамічні моделі грузопідъемних кранов с навесним вібраційним технологічним обладнанням / А.Ф. Шевченко, Н.П. Колесник // Підйомно-транспортна техніка, №1-2. - Дніпропетровськ, 2002. - с. 93-100.
5. Нестеров А.П. О влиянии неуравновешенности барабана на динамические нагрузки в канатном подъемнике / А.П. Нестеров, Л.М. Козарь // Вісник Східноукр. держ. ун-ту, №6(28). – Луганськ: Вид-во СУДУ, 2000. - с. 41-44.
6. Неженцев О.Б. Зниження динамічних навантажень при гальмуванні мостового крана шляхом оптимізації механічної характеристики електроприводу / О.Б. Неженцев // Вісник НТУУ «Київський політехнічний інститут». Серія Машинобудування. – Київ, 2015, Вип. №3(75). – С. 151 – 158.
7. Неженцев А.Б. Исследование энергопотребления при динамическом торможении мостового крана / А.Б. Неженцев, М.С. Харитонов, С.М. Аветисян // Вісник Східноукраїнського національного університету, №11(45). – Луганськ: Вид-во СХУ, 2001.- С. 96-102.