

## Щодо визначення параметрів ядер поперечної повзучості

В.С. Резнік<sup>1</sup>, О.В. Ушаков<sup>2</sup>

1 – Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України

2 – Інститут спеціальної техніки та судових експертиз Служби безпеки України

**Анотація:** Стаття присвячена методиці визначення параметрів ядер поперечної повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану.

**Проблематика:** Однією з основних задач в теорії в'язкопружності є задача вибору структури ядра спадковості та визначення параметрів ядер. Задача є актуальною, оскільки від правильного визначення невідомих параметрів суттєво залежить термін експлуатації елементів конструкцій.

**Мета дослідження:** Метою роботи є розробка методу визначення параметрів ядер поперечної повзучості та проведення апробації отриманих результатів на задачах розрахунку деформації поперечної повзучості.

**Методика реалізації:** Оскільки дана методика справедлива лише для лінійних матеріалів, то на першому етапі обґрунтовується лінійність в'язкопружних властивостей. Параметри ядер знаходимо на підставі гіпотези існування єдиної кривої повзучості, існування якої представлено в довірчому інтервалі в межах 10%. В якості ядра спадковості використовуємо дробово-експоненціальне ядро. Задача зводиться до мінімізації функціоналу квадратичного відхилення експериментальних даних від розрахункових.

**Висновки:** На підставі отриманих результатів можна зробити висновок про працездатність наведеної методики як для "Оргскла СТ-1" так і для інших лінійних матеріалів. Максимальне відхилення розрахункових даних від експериментальних складає 5%.

**Ключові слова:** Поперечна повзучість; параметри ядер поперечної повзучості; квантиль статистики; функція повзучості; дробово-експоненціальне ядро; параметри ядер.

### Вступ

Параметри ядер спадковості лінійних і нелінійних в'язкопружних матеріалів визначаються, як правило, шляхом обробки експериментальних даних на повзучість зразків матеріалу за умов одновісного розтягу при постійних напруженнях [1, 2]. Складності, що виникають при визначенні параметрів ядер спадковості пов'язані з вибором адекватної моделі в'язкопружності і з похибками вимірів в області малих часів, коли виникають динамічні ефекти [3].

Робота присвячена актуальній темі механіки деформівного твердого тіла, поперечній повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів. Поперечні деформації отримують з базового експерименту на одновісний розтяг. Параметри ядер спадковості, що знайдені з базового експерименту на одновісний розтяг використовуються для визначення параметрів ядер спадковості за умов складного напруженого стану. В роботі наведено основні процедури і методи визначення параметрів ядер, а результати розрахунків апробуються на задачах розрахунку деформацій поперечної повзучості оргскла СТ-1.

### Мета роботи

Метою роботи є визначення параметрів ядер поперечної повзучості які є матеріальними константами і дозволяють моделювати процес повзучості для напружень, що виходять за межі експерименту. Параметри визначаються за кривими податливості. Для досягнення мети першочергово перевіряється лінійність в'язкопружних властивостей, оскільки методика справедлива лише для лінійних матеріалів. Для визначення параметрів ядер використовується метод мінімізації функціоналу.

### Постановка задачі

Процеси довготривалого повздовжнього деформування для лінійних в'язкопружних мате-

ріалів за умов одновісного розтягу задаються рівнянням теорії спадкової в’язкопружності Больцмана-Вольтера в формі [1, 2, 3]

$$\varepsilon_{22} = -\left(\frac{\nu}{E}\sigma_{11}(t) + \frac{\nu}{E}\lambda_{22}\int_0^t K_{22}(t-\tau)\sigma_{11}(\tau)d\tau\right) \quad (1)$$

яке при  $\sigma_{11} = const$  зводяться до рівняння

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11}\left(1 + \lambda_{22}\int_0^t K_{22}(t-\tau)d\tau\right). \quad (2)$$

Де,  $\varepsilon(\tau)$  – повна деформація, що містить пружну компоненту  $\varepsilon^e$  і деформацію повзучості  $\varepsilon^c(t)$  в моменти часу  $t$  і  $\tau$ ;  $\sigma_{11}(t)$ ,  $\sigma_{11}(\tau)$  – напруження, що діє в моменти часу  $t$  і  $\tau$ ;  $K_{22}(t-\tau)$  – ядро повзучості;  $E$ – модуль пружності;  $\lambda_{22}$ – реологічний параметр ( $\lambda_{22}>0$ );  $t$ – час спостереження;  $\tau$ – час, що передує часу спостереження.

В роботі в якості ядра спадковості використовується дробово-експоненціальне

$$K_{22}(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{22})^n (t-\tau)^{\alpha_{22}+(1+\alpha_{22})n}}{\Gamma((1+\alpha_{22})(1+n))} \quad (3)$$

Де  $\alpha_{22}$ ,  $\beta_{22}$ – параметри ядра, що визначаються з експерименту на повзучість ( $1 > \alpha_{22} > 0$ ;  $\beta_{22} > 0$ );  $\Gamma[\cdot]$ – гама-функція.

Дискретні значення в області сингулярності враховуються за допомогою вагових функцій у вигляді

$$p_j(t) = \frac{1}{1 + \left| \frac{K_s(t_j) - \lambda_s K_s(t, q_s)}{K_s(t_*) - \lambda_s K_s(t_*, q_s)} \right|^m} \quad (4)$$

Тут  $q_s$  – параметри ядра ( $s = 1, k$ );  $n$  – число дискретних значень ядер поперечної повзучості в інтервалі  $\{0; t_j\}$ ;  $n^*$  – число дискретних значень ядер поперечної повзучості в області  $\{0; t^*\}$ ;  $m$  – порядок моментів ( $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ ).

Задача визначення параметрів ядер поперечної повзучості (1) зводиться до визначення параметрів ядер, що визначаються з умови мінімізації функціоналу

$$F(\lambda_s, q_s) = \sum_{j=1}^{n^*} \{p_j(t)[K_s(t_j) - \lambda_s K_s(t, q_s)]\}^2 + \sum_{j=n^*}^n \{p_j(t)[K_s(t_j) - \lambda_s K_s(t, q_s)]\}^2 \quad (5)$$

де вагова функція  $p_j(t)$  задається співвідношенням (4).

### Визначення параметрів ядер поперечної повзучості

Дискретні значення  $K_s(t_j)$  ядер поперечної повзучості  $K_s(t, q_s)$  в (4) визначаються за результатами обробки експериментальних даних виходячи з умови існування єдиної кривої податливості. В якості експериментальних даних використовуються запозичені з літератури дані для оргскла СТ-1.

Розв’язок поставленої задачі включає обґрунтування лінійності в’язкопружних властивостей, дискретизацію ядер поперечної повзучості, визначення параметрів ядер і експериментальну апробацію.

Лінійність процесу повзучості в’язкопружних матеріалів обґрунтовується виходячи з умови однорідності. Вважається, що матеріал є лінійно-в’язкопружним якщо функція повзучості  $J(t)$

$$J_1(t) = \frac{\varepsilon_{22}(t, \sigma_1)}{\sigma_1} = J_2(t) = \frac{\varepsilon_{22}(t, \sigma_2)}{\sigma_2} = \dots = J_m(t) = \frac{\varepsilon_{22}(t, \sigma_m)}{\sigma_m} \quad (6)$$

інваріантна по відношенню до рівнів напружень  $\tau_m (\overline{s=1,k})$ , а розрахункове значення квантиля статистики  $t_{\alpha,k}$

$$t_{\alpha,k} = \frac{\sqrt{n}}{s_j(t_j)} \delta \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m J_k(t_j) = \frac{\sqrt{n}}{s_j(t_j)} \delta \bar{J}(t_j) < t_{\alpha,k}^*, \quad j = \overline{1,l}, \quad (7)$$

більше його критичного табличного значення  $t_{\alpha,k}^*$ . Тут  $J_k(t_j)$  – значення функції повзучості в момент часу  $t_j$  при напруженні  $\tau_j$ ;  $\bar{J}(t_j)$  – вибіркове середнє значення функції повзучості;  $S_j(t_j)$  – середнє квадратичне відхилення велечини  $\bar{J}(t_j)$ ;  $n$  – об’єм вибірки (число функцій повзучості);  $\delta$  – максимальна похибка між значеннями  $J_k(t_j)$  і  $\bar{J}(t_j) < t_{\alpha,k}^*$ .

Величина похибки  $\delta$  в подальших розрахунках задається рівною  $\pm 5\%$ , а ймовірність потрапляння експериментальних функцій повзучості  $J_k(t_j)$  в інтервал, обмежений величиною  $\delta = \pm 5\%$ , по відношенню до величини  $\bar{J}(t_j)$ , має бути не менше 90%.

Метод визначення параметрів ядер поперечної повзучості ґрунтується на безпосередній обробці первинних експериментальних даних на повзучість в формі функції повзучості, яка будується по значенням податливості матеріалу. Функція повзучості не залежить від напружень і може бути записана у вигляді

$$J_{22}(t) = -\frac{\nu}{E} \left\{ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{22})^n(t)^{(1+\alpha_{22})(1+n)}}{\Gamma(1+(1+\alpha_{22})(1+n))} \right\}. \quad (8)$$

Реалізація методу. Параметри ядер поперечної повзучості знаходяться з умови найкращого узгодження значень функції повзучості знайдених за рівнянням (8) і експериментальними значеннями функції повзучості. В якості критерія найкращого узгодження використовується умова мінімізації квадратичного відхилення Задача зводиться до мінімізації функціоналу

$$F(\alpha_{22}, \beta_{22}, \lambda_{22}) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\varepsilon(t_i, \sigma_k)}{\sigma_k} - \frac{1}{E} \left[ 1 + \lambda_{22} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{22})^n(t)^{(1+\alpha_{22})(1+n)}}{\Gamma(1+(1+\alpha_{22})(1+n))} \right] \right\}^2 \quad (9)$$

В таблиці 1 наведено параметри ядер поперечної повзучості, що визначені з мінімізації функціонала (1).

Таблиця 1.

Параметри ядер поперечної повзучості оргскла СТ-1

Параметри ядра	Оргскло СТ-1
$\alpha_{22}$	0,87
$\beta_{22}, \text{год}^{(1+\alpha)}$	0,05
$\lambda_{22}, \text{год}^{(1+\alpha)}$	0,69

В якості апробації параметрів з таблиці 1 використовуємо розрахунок деформації повзучості оргскла СТ-1. Як видно з рис. 1 а розрахунки узгоджуються з експериментальними даними. Криві повзучості побудовані при напруженнях 7,65; 11,45, 15,3 МПа. На рис. 1 б наведено єдину функцію повзучості, що демонструє допустимість застосованої моделі.

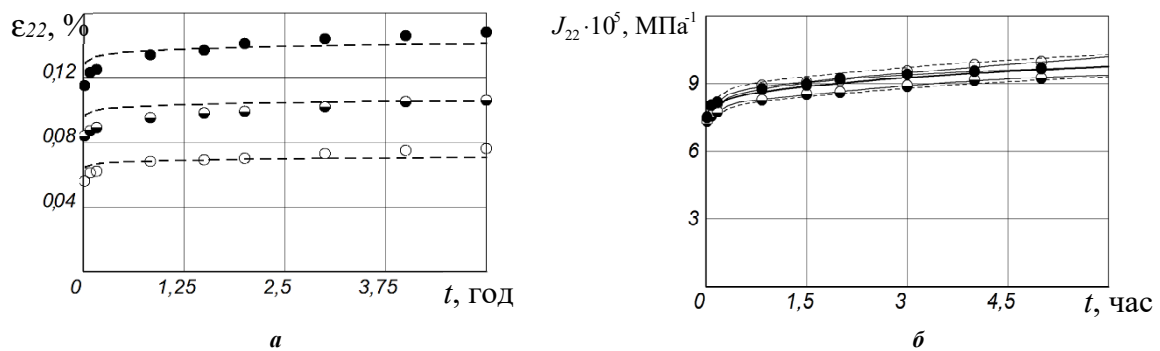


Рис. 1. Криві поперечної повзучості оргскла (а), функція повзучості оргскла (б)

## Висновки

Ефективність запропонованого методу визначення параметрів ядер зсувної спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів та достовірність одержуваних значень параметрів ядер оцінюються в роботі за результатами узгодження розрахункових та експериментальних даних на повзучість та на релаксацію. Експериментальна апробація методу здійснена з прикладу розрахунку деформацій повзучості при постійних напруг, деформацій зворотної повзучості при повному розвантаженні та релаксації напруг.

Загалом, як видно з даних, представлених на рис. 1 результати розрахунків, виконаних з використанням знайдених за запропонованим методом параметрів ядер спадковості, задовільно узгоджуються з експериментальними даними.

## Список літератури

1. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций // Теорет и прикл. механика. 2009. Вып. 46. С. 70–80.
2. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости. // Прикл. механика. 2011. Том 47, №3. С. 75–88.
3. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. К задаче определения параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прикл. механика. 2012. Вып. 5(51). – С. 26–35.

## How to define the parameters of the kernel of the transverse creep

V. Reznik, O. Ushakov

**Abstract:** The article is devoted to the methodology for determining the parameters of the kernels of the transverse creep of the linear-viscosity materials for the minds of a folding stressed frame. Issues: One of the main tasks in the theory of viscosity is the task of choosing the structure of the kernel of decay and the assignment of parameters of the kernels. The task is actual, shards of the correct designation of unknown parameters in the present to lay down the terms of operation of structural elements. Purpose: The method of work is the development of the method of assigning the parameters of the kernels of transverse creep and the approbation of the results on the problems of analysis of the deformation of transverse creep. Implementation methodology: If the given methodology is only valid for linear materials, then at the first stage, linearity in viscous powers is entrenched. The parameters of the kernels are significant on the basis of the hypothesis of a single function of creep, the basis of which is presented in a confidence interval of 10%. In the capacity of the core of the decay of the vicorist, there is a shot-exponential kernel. The task is to reduce to the minimization of the functionality of the quadratic adjustment of the experimental data in the species of rozrachunks. On the basis of the results, it is possible to create a conclusions about the practicality of the induced technique, both for "Plaxiglass ST-1" and for other linear materials. The maximum allowance for calculation data from experimental warehouses is 5%.

**Keywords:** Transverse creep; parameters of kernel of transverse creep; statistics quantile; creep function; shot-exponential kernel; kernel parameters.