УДК 539.3 DOI: 10.20535/2409-7160.2023.XXIII.277903

Розширений формалізм Стро для розв’язування плоских задач теорії термопружності квазікристалічних середовищ

Р.М. Кушнір[1]; Я.М. Пастернак[2]; Г.Т. Сулим[1]
1 - Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
2 - Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

Анотація. *У даному дослідженні створено математичний метод аналізу плоских фононно-фазонних термомеханічних полів у квазікристалічних тілах на основі апарату теорії функції комплексної змінної та формалізму Стро. Конститутивні та балансові рівняння термопружності квазікристалічних тіл записані в узагальненій формі із використанням розширених фононно-фазонних векторів і тензорів. Адаптуючи методи формалізму Стро, сформульовану загальну задачу зведено до пошуку 7-ми аналітичних функцій (1 для температурного та 6 для фононно-фазонних полів). Отриманий підхід використано для побудови інтегральних рівнянь відповідних двовимірних задач термопружності квазікристалічних тіл, а також на його основі розв’язано конкретну задачу для квазікристалічного середовища із тріщиною. Отримано розподіли температурного та механічного полів у тілі та функції асимптотичничних розподілів фононно-фазонних полів поблизу вершини тріщини з використанням коефіцієнтів інтенсивності фононних та фазонних напружень.*
Ключові слова: *квазікристал; термопружність; формалізм Стро; тріщина; інтегральне рівняння.*

У сучасному аерокосмічному машино- та приладобудуванні усе частіше використовують новітні матеріали, поведінку яких неможливо описати підходами, придатними для традиційних. Це зумовлює необхідність створення нових математичних підходів до їхнього моделювання. Зокрема, для квазікристалічних матеріалів розвиваються теорія пружності та термопружності, які виокремлюють у механічному полі всередині такого середовища фононну та фазонну складові [1, 2]. Метою даного дослідження є створення математичного методу аналізу фононно-фазонних плоских термомеханічних полів у квазікристалічних тілах на основі апарату теорії функції комплексної змінної та формалізму Стро [3].

У даній роботі конститутивні співвідношення теорії пружності квазікристалів [1, 2] записано у такій узагальненій формі:

$$\tilde{\sigma}_{Ij} = \tilde{C}_{IjKm}\tilde{u}_{K,m}\,, \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned} &\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}\,, \tilde{\sigma}_{(i+3)j} = H_{ij}\,, \tilde{u}_i = u_i\,, \tilde{u}_{i+3} = w_i\,; \\ &\tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm}\,, \tilde{C}_{ij(k+3)m} = R_{ijkm}\,, \\ &\tilde{C}_{(i+3)jkm} = R_{kmij}\,, \tilde{C}_{(i+3)j(k+3)m} = K_{ijkm}\ \left(i,j,k,m = 1,2,3\right), \end{aligned} \tag{2}$$

σ_{ij} – фононні напруження; H_{ij} – фазонні напруження; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$ – компоненти фононного тензора деформацій; $w_{i,j}$ – фазонні деформації; C_{ijkm} – компоненти тензора фоннонних пружних сталих; K_{ijkm} –компоненти тензора фазонних пружних сталих; R_{ijkm} та $R'_{ijkm} = R_{kmij}$ – компоненти тензорів фононно-фазонної взаємодії. Причому отриманий розширений тензор $\tilde{C}_{IjKm}$ фононно-фазонних сталих є симетричним:

$$\tilde{C}_{IjKm} = \tilde{C}_{KmIj}\,. \tag{3}$$

У (1), (3) індекси великими літерами змінюються від 1 до 6, тоді як індекси малими літерами змінюються від 1 до 3.

Відповідно до [2] рівняння рівноваги квазікристалічного середовища можна записати у вигляді:

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad H_{ij,j} = -g_i, \tag{4}$$

де f_i, g_i – відповідно компоненти векторів фононних та фазонних складових масових сил.

Використовуючи узагальнені величини (2), рівняння рівноваги квазікристалічного середовища (4) набудуть вигляду

$$\tilde{\sigma}_{Ij,j} = -\tilde{f}_I. \tag{5}$$

Підставивши (1) у (5) отримано рівняння рівноваги пружного квазікристала, записані у компонентах розширеного вектора фононно-фазонних переміщень

$$\tilde{C}_{IjKm}\tilde{u}_{K,jm} = -\tilde{f}_I. \tag{6}$$

Співвідношення термопружності квазікристалічних тіл відповідно до [4, 5] записано у такій узагальненій формі:

$$\tilde{\sigma}_{Ij} = \tilde{C}_{IjKm}\tilde{u}_{K,m} - \tilde{\beta}_{Ij}\theta. \tag{7}$$

Підставивши (7) у балансові рівняння (5), отримано таке рівняння термопружної рівноваги квазікристалічного середовища:

$$\tilde{C}_{IjKm}\tilde{u}_{K,jm} - \tilde{\beta}_{Ij}\theta_{,j} = -\tilde{f}_I. \tag{8}$$

Розглянуто циліндричні квазікристалічні тіла, в яких фононні та фазонні переміщення не змінюються з координатою x_3 (паралельна до твірної поверхні), тобто, $\tilde{u}_{I,3} \equiv 0$. Для таких двовимірних полів, що залежать лише від декартових координат x_1 та x_2, можна розширити формалізм Стро [3] та подати однорідний (для випадку $\tilde{f}_I = 0$) розв'язок рівнянь рівноваги (6) квазікристалу у формі

$$\tilde{u}_K = a_K F\left(x_1 + px_2\right), \tag{9}$$

де a_K та p є певними комплексними сталими, що потребують визначення. Аналітична функція $F\left(x_1 + px_2\right)$ залежить від крайових умов на межі зайнятої тілом області у площині Ox_1x_2.

За відсутності об'ємних сил, внаслідок підстановки (9) у (6) отримано рівняння щодо невідомих комплексних сталих a_K та p:

$$\tilde{C}_{IjKm}\left(\delta_{j1} + p\delta_{j2}\right)\left(\delta_{m1} + p\delta_{m2}\right)a_K = 0, \tag{10}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. У матричній формі рівняння (10) набудуть вигляду подібного за структурою до відповідних співвідношень формалізму Стро [3]

$$\left[\mathbf{Q} + p\left(\mathbf{R} + \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\right) + p^2\mathbf{T}\right]\mathbf{a} = 0. \tag{11}$$

Тут верхній індекс "T" означає операцію транспонування, а компоненти матриць $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ означені так:

$$Q_{IK} = \tilde{C}_{I1K1}, \quad T_{IK} = \tilde{C}_{I2K2}, \quad R_{IK} = \tilde{C}_{I1K2} = \tilde{C}_{K2I1}. \tag{12}$$

Відповідно до властивості (3) матриці $\mathbf{Q}$ та $\mathbf{T}$ симетричні. На відміну від формалізму Стро для задач теорії пружності анізотропного тіла, у задачах пружності (та термопружності) квазікристалів матриці $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ мають розмір 6x6.

Компоненти $\tilde{\sigma}_{Ij}$ розширеного тензора фононно-фазонних напружень відповідно до (1) та (9) з урахуванням позначень (12) дорівнюють

$$\tilde{\sigma}_{I1} = \left(Q_{IK} + pR_{IK}\right) a_K F'\left(x_1 + px_2\right), \quad \tilde{\sigma}_{I2} = \left(R_{KI} + pT_{IK}\right) a_K F'\left(x_1 + px_2\right), \tag{13}$$

де $F'\left(z\right) = dF\left(z\right)/dz$ – повна похідна від функції $F\left(x_1 + px_2\right)$.

Співвідношення (11) можна переписати у такому вигляді:

$$-\frac{1}{p}\left(Q_{IK} + pR_{IK}\right) a_K = \left(R_{KI} + pT_{IK}\right) a_K . \tag{14}$$

Тоді позначивши

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} + p\mathbf{T}\right)\mathbf{a} = -\left(\mathbf{Q} + p\mathbf{R}\right)\mathbf{a}/p , \tag{15}$$

$$\tilde{\varphi}_I = b_I F\left(x_1 + px_2\right), \tag{16}$$

запишемо (13) так:

$$\tilde{\sigma}_{I1} = -\tilde{\varphi}_{I,2}, \quad \tilde{\sigma}_{I2} = \tilde{\varphi}_{I,1} . \tag{17}$$

Тут $\tilde{\varphi}_i$ – узагальнена функція фононно-фазонних напружень.

Подвійну рівність (15) аналогічно до [3] можна переписати у вигляді

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^{\mathrm{T}} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

де $\mathbf{I}$ – одинична матриця. Враховуючи симетрію матриць $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{T}$ та те, що $\mathbf{T}^{-1}$ існує, (18) можна подати у формі задачі на власні значення [3]:

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\xi} = p\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} = p\boldsymbol{\eta} . \tag{19}$$

Тут

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{N}_2^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} - \mathbf{Q} = \mathbf{N}_3^{\mathrm{T}} . \tag{21}$$

Правий $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ та лівий $\boldsymbol{\eta}_\beta$ власні вектори, обчислені для власних значень p_α, p_β, нормуватимемо умовою [3]

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_\beta = \delta_{\alpha\beta} . \tag{22}$$

Оскільки переміщення є дійсною функцією, то повний розв’язок рівнянь термопружності (8) записано у вигляді дійсної частини суми однорідного (9) та часткового неоднорідного розв’язків:

$$\tilde{\mathbf{u}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}\mathbf{f}\left(z_*\right) + \mathbf{c}g\left(z_t\right)\right\} . \tag{23}$$

Компоненти $\tilde{\sigma}_{Ij}$ розширеного тензора напружень знову ж таки обчислюються за формулою (17), але при цьому розширена функція напружень $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ матиме вигляд:

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{B}\mathbf{f}\left(z_*\right) + \mathbf{d}g\left(z_t\right)\right\} . \tag{24}$$

Застосовуючи для подання комплексних потенціалів інтегральну формулу Коші

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\phi(\tau)}{\tau - z}d\tau \tag{25}$$

вдалося отримати інтегральні формули (а при використанні співвідношень Племелі й інтегральні рівняння) задач теплопровідності та термопружності квазікристалічних тіл.

Розглянуто плоску задачу термопружності для квазікристалічного тіла із тріщиною. З’ясовано, що як і у випадку плоскої задачі теорії пружності, фононно-фазонні поля мають кореневу особливість у вершинах дефекту. Вперше отримано узагальнені асимптотичні розподіли для полів фононних та фазонних переміщень та напружень поблизу вершини тріщини у формі:

$$\tilde{\mathbf{u}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}\left\langle\sqrt{Z_*}\right\rangle\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{k}}\right\} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 &= \left[\tilde{\sigma}_{i1}\right] = -\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{,2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{B}\left\langle p_* Z_*^{-1/2}\right\rangle\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{k}}\right\},\\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 &= \left[\tilde{\sigma}_{i2}\right] = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{,1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{B}\left\langle Z_*^{-1/2}\right\rangle\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{k}}\right\}.\end{aligned} \tag{27}$$

Тут $\tilde{\mathbf{k}} = \left[K_{II}^{\sigma}, K_{I}^{\sigma}, K_{III}^{\sigma}, K_{II}^{H}, K_{I}^{H}, K_{III}^{H}\right]^{\mathrm{T}}$ – узагальнений вектор коефіцієнтів інтенсивності фононних та фазонних напружень; $\left\langle F\left(Z_*\right)\right\rangle = \mathrm{diag}\left(F\left(x_1 + p_\alpha x_2\right)\right)$.

Отримано низку аналітичних розв’язків задач теормопружності квазікристалічних тіл із тріщинами.

Список літератури

1. T.-Y. Fan, *Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications*, Second Edition. Springer, 2016. https://doi.org/10.1007/978-981-10-1984-5
2. T.Y. Fan, W. Yang, H. Cheng, X.H. Sun, *Generalized Dynamics of Soft-Matter Quasicrystals: Mathematical Models, Solutions and Applications*, Second Edition. Singapore: Springer, 2022. https://doi.org/10.1007/978-981-16-6628-5
3. T.C.T. Ting, *Anisotropic elasticity: theory and applications*. New York: Oxford University Press, 1996.
4. F. Long, X.-F. Li. “Thermal stresses of a cubic quasicrystal circular disc,” *Mechanics Research Communications*, vol. 124, pp. 103913, 2022.
5. J. Pi, Y. Zhao, L. Li, “Interaction between a Screw Dislocation and Two Unequal Interface Cracks Emanating from an Elliptical Hole in One Dimensional Hexagonal Piezoelectric Quasicrystal Bi-Material,” *Crystals* vol. 12, pp. 314, 2022. https://doi.org/10.3390/cryst12030314

Extended Stroh formalism for plane problems of thermoelasticity of quasicrystal media

R. Kushnir, Ia. Pasternak, H. Sulym

Abstract. *This study provides a mathematical method for the analysis of plane phonon-phason thermomechanical fields in quasi-crystalline bodies, which was developed based on the complex variable calculus and the Stroh formalism. Constitutive and balance equations of – thermoelasticity of quasicrystal solids are written in a generalized form using extended phonon-phason vectors and tensors. Adapting the methods of the Stroh formalism, the formulated general problem is reduced to the search for 7 analytical functions (1 for temperature and 6 for phonon-phason fields). The obtained approach was used to construct the integral equations of the corresponding two-dimensional problems of the thermoelasticity of quasicrystal solids, and on its basis a specific problem for a quasi-crystalline medium with a crack was solved. Distributions of temperature and mechanical fields in the body and functions of asymptotic distributions of phonon-phason fields near the crack tip using intensity coefficients of phonon and phason stresses were obtained.*
Keywords: *quasicrystal; thermoelasticity; Stroh formalism; crack; integral equation.*