УДК 624.074.04 DOI: 10.20535/2409-7160.2023.XXIII.277963

Тривимірна стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском

В. М. Трач[1]; А. В. Подворний[1]; Н.Б. Жукова[2]
1 – Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна
2 – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Анотація. *На основі модифікованого варіаційного принципу Ху-Васідзу отримана тривимірна система однорідних лінеаризованих диференціальних рівнянь стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок тип анізотропії яких характеризується однією площиною пружної симетрії. Приведення системи до одновимірної здійснюється при використанні методу Бубнова-Гальоркіна, яким апроксимуються функції невідомих системи рівнянь за твірною та враховується їх періодичність в коловому напрямку. Чисельний розв'язок отриманої одновимірної системи рівнянь проводиться при використанні методу дискретної ортогоналізації.*

Розв'язана задача стійкості нетонкої анізотропної циліндричної оболонки для різної кількості перехресно-укладених композитних шарів від дії осьового тиску. Проаналізовано характер залежності критичних зусиль від кількості шарів.

Ключові слова: *принцип Ху-Васідзу; анізотропні циліндричні оболонки; стійкість.*

Проблематика

Стійкості анізотропних оболонкових конструкцій з композитних матеріалів присвячені роботи [1, 2], де дослідження проводиться відповідно при використанні класичної та уточненої теорій. Як відомо, при цьому, наприклад, низька зсувна жорсткість, неоднорідність матеріалу оболонок за товщиною враховуються не в повній мірі. Тому важливим аспектом дослідження стійкості нетонких оболонок є врахування вказаних особливостей, що можливо при використанні тривимірної теорії.

В роботах присвячених дослідженню стійкості оболонкових конструкцій в просторовій постановці [3, 4] розглядалось випадки, коли оболонки в своїх осях були ізотропними або ортотропними. Це залишає поза увагою випадок, коли в якості матеріалу оболонкової конструкції використовується волокнистий композит, головні напрямки пружності якого можуть знаходитись під деяким кутом до власної криволінійної системи координат. В цьому випадку анізотропія матеріалу конструкції характеризується однією площиною пружної симетрії паралельної серединній поверхні [5, 6, 7, 8].

Мета дослідження

В роботі, на основі модифікації функціонала узагальненого принципу Ху-Васідзу [9], отримана однорідна система тривимірних диференціальних рівнянь стійкості в рамках теорії пружності анізотропного тіла. Для приведення тривимірної задачі стійкості до одновимірної застосована процедура методу Бубнова-Гальоркіна. При використанні такого підходу, досліджено стійкість циліндричних композитних анізотропних шаруватих оболонкових конструкцій з матеріалу з однією площиною пружної симетрії, що знаходяться в умовах осьового тиску.

Методика реалізації

Відповідно до варіаційного принципу Ху-Васидзу [9] диференціальні рівняння стійкості, співвідношення пружності, геометричні залежності та граничні умови можливо отримати з умови стаціонарності функціоналу Π_1, що визначається з інтегралу:

$$\Pi_1=\left\{\iiint\limits_V\left\{W\left(e_{ij}\right)-T\left(u_i\right)+\Phi\left(u_i\right)-\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}\left(u_{i;j}+u_{j;i}\right)\right]\right\}dV+\iint\limits_{S_1}\Psi\left(u_i\right)dS-\iint\limits_{S_2}p_i\left(u_i-\overline{u}_i\right)\right\}dS$$

(1)

Тут варіюються без додаткових умов переміщення u_i, деформації e_{ij}, напруження σ_{ii}, напруження p_i на поверхні S_2, що викликані переміщеннями $\overline{u}_i$. Також в цьому функціоналі $W\left(e_{ij}\right)$ – потенціальна енергія деформації, $T\left(u_i\right)$ – кінетична енергія, $\Phi\left(u_i\right)$, $\Psi\left(u_i\right)$ – потенціали об’ємних і поверхневих навантажень, u_i – компоненти вектора переміщень, крапка з комою перед параметрами *i*, *j* вказує коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом *i*, *j*, *k* = 1, 2, 3.

Використовуючи підхід описаний в [7], отримаємо таку систему лінеаризованих рівнянь стійкості в тривимірній постановці для нетонких анізотропних композитних циліндричних оболонкових конструкцій:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}=-\frac{c_{23}+1}{r}\sigma_{rr}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}-\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{c_{12}}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{c_{22}}{r^2}u_r+\frac{c_{22}}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{c_{26}}{r^2}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+\frac{c_{26}}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+$$

$$+\left(-\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}c_{23}-\frac{2}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}c_{23}-\frac{1}{r}u_r c_{23}-2\frac{\partial u_\theta}{\partial z}c_{36}\right)\sigma_{rr}^0+\left(-\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\tau_{rz}^0+\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}u_\theta\right)\tau_{r\theta}^0;$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}=\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z}c_{13}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\theta}c_{36}-\frac{1}{r}\tau_{rz}-\frac{c_{12}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}--\frac{c_{26}}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\sigma_{rr}^0-\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\tau_{rz}^0-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)\tau_{r\theta}^0$$

;

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\theta}c_{23}+\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z}c_{36}-\frac{2}{r}\tau_{r\theta}-\frac{c_{22}}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{c_{26}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\left(-\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}c_{23}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}u_\theta c_{23}+2\frac{\partial u_r}{\partial z}c_{36}\right)\sigma_{rr}^0+\left(-\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\tau_{rz}^0+\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{1}{r}u_r\right)\tau_{r\theta}^0;$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{\partial u_z}{\partial z}c_{13}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)c_{23}+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)c_{36}+\sigma_{rr}c_{33};$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r}=-\frac{\partial u_r}{\partial z}+\tau_{r\theta}a_{45}+\tau_{rz}a_{55};\quad\frac{\partial u_\theta}{\partial r}=\frac{1}{r}u_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\tau_{r\theta}a_{44}+\tau_{rz}a_{45}\qquad(2)$$

В (2) r – радіус циліндра; σ_{rr}, τ_{rz}, $\tau_{r\theta}$ – складові тензора напружень; u_z, u_θ, u_r – переміщення оболонки згідно до напрямків осей z, θ, r. Напруження $\sigma_{rr}^0, \tau_{rz}^0$ та $\tau_{r\theta}^0$ визначаються після розв’язку задачі про докритичний напружено-деформований стан в залежності від прикладеного до оболонки навантаження згідно з [6]. Сталі c_{kl} (*k, l*=1, 2, 3, 6) – це характеристики матеріалу оболонки, що визначаються згідно [7].

При розв’язку задачі стійкості, системі (2) мають відповідати умови на бічних поверхнях при:

$$r=r_1:\ \sigma_{rr}^0\left(r_1,z,\theta\right)=0;\ \tau_{rz}^0\left(r_1,z,\theta\right)=0;\ \tau_{r\theta}^0\left(r_1,z,\theta\right)=0;$$

$$r = r_2:\ \sigma_{rr}^{n}\left(r_2, z, \theta\right) = 0;\ \tau_{rz}^{n}\left(r_2, z, \theta\right) = 0;\ \tau_{r\theta}^{n}\left(r_2, z, \theta\right) = 0 \tag{3}$$

Умови на торцях циліндричної оболонки при $z = 0$, $z = L$ такі

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0 \tag{4}$$

Розв'язок отриманої тривимірної системи рівнянь стійкості при заданих умовах на поверхнях та торцях оболонки проведемо з використанням процедури методу Бубнова-Гальоркіна, що викладена в [6]. Відповідно до неї розкладемо всі функції напружень та переміщень у подвійні тригонометричні ряди за коловим напрямком θ та за координатою вздовж твірної циліндра z так, що б вони задовольняли крайовим умовам (4).

Після математичних перетворень отримуємо нескінченну систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші

$$\frac{d\overline{y}}{dr} = T\left(r, \lambda\right)\overline{y}, \quad T\left(r, \lambda\right) = t_{i,j}\left(r, \lambda\right), \quad i = \overline{1,\infty}, \ j = \overline{1,\infty}\lambda \quad , \tag{5}$$

де $\overline{y} = \left\{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y_{1,mk}^{/}; y_{2,mk}^{/}; y_{3,mk}^{/}; y_{4,mk}^{/}; y_{5,mk}^{/}; y_{6,mk}^{/}\right\}$ – розв'язую-ча вектор-функція, $T\left(r, \lambda\right)$– квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r та параметра навантаження . Розв'язок системи рівнянь стійкості (5) для граничних умов (3) проводиться з використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Результати дослідження

В якості реалізації запропонованого підходу розглянемо стійкість, від дії осьового стискаючого навантаження, циліндричної оболонки сталої товщини, утвореної перехресним армуванням різної кількості шарів волокнистого композитного матеріалу під кутами $\pm\psi$ до твірної z. В якості композитного матеріалу обраний склопластик з такими фізико-механічними характеристиками: E_{zz} = 44,5E_0, $E_{\theta\theta}$ = E_{rr}= 10,7E_0, $G_{z\theta}$ = $G_{r\theta}$ = 4,18E_0, G_{rz} = 8,48E_0, $\nu_{\theta z}$ = 0,26, $\nu_{z\theta}$ = 0,0628, E_0 = 1000 МПа. Геометричні характеристики оболонки такі: довжина уздовж твірної L = 1,2 м; радіуси поверхонь: внутрішньої r_1 = 0,585 м; зовнішньої r_2 = 0,615 м.

На рис. приведено результати розрахунку на стійкість циліндричних оболонок в залежності від кількості перехресно-укладених ($\pm\psi$) шарів. Номер кривої відповідає кількості шарів, крива $1^{/}$ отримана при розрахунку без урахування анізотропних констант матеріалу (ортотропний розрахунок).

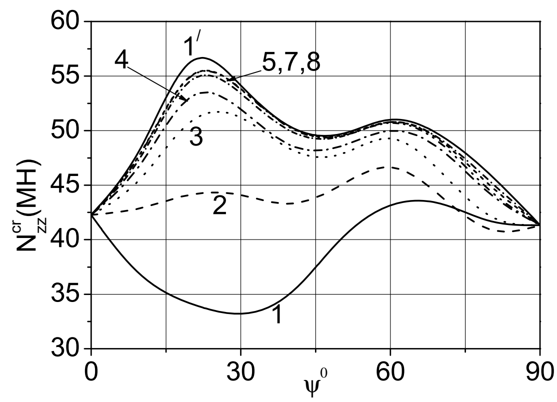

Рис. Вплив збільшення перехресно-укладених шарів на стійкість анізотропної циліндричної оболонки

Характер зміни величин критичних стискаючих зусиль, представлений на рис., вказує на те, що їх величини залежать від кількості перехресно ($\pm\psi$) укладених шарів. Збільшення їх числа веде до того, що значення критичних навантажень наближаються до величин отриманих без урахування анізотропних констант матеріалу (крива $1^/$). Розходження між критичними зусиллями N_{zz}^{cr} отриманими для восьмишарового пакету (крива 8) і ортотропним розрахунком (крива $1^/$) знаходиться в межах 4%.

Висновки

В роботі, на основі модифікованого варіаційного принципу Ху-Васідзу отримана тривимірна система однорідних диференціальних рівнянь стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок. Для зменшення розмірності системи використана процедура Бубнова-Гальоркіна. Чисельна реалізація підходу базується на використанні методу дискретної ортогоналізації. Розв'язана задача стійкості для циліндричної анізотропної оболонки під осьовим тиском для різної кількості перехресно-укладених шарів волокнистого композиту.

Список літератури:

1. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела, 2010. 352 с.
2. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела, 2019. 274 с.
3. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. 511 с.
4. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. 280 с.
5. Podvornyi A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of inhomogeneous cylindrical shells under distributed external pressure in a three-dimensional statement // Int. Appl. Mech. – 2017. 53, N 6. pp. 623–638.
6. Semenyuk N.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Spatial Stability of Layered Anisotropic Cylindrical Shells Under Compressive Loads // Int. Appl. Mech. – 2019. 55, N 2. pp. 211–221.
7. Трач В.М., Подворний А.В. Просторові рівняння стійкості анізотропних товстих циліндричних оболонок під дією осьового тиску. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. Випуск 41. – НУВГП. – Рівне – 2022. pp. 197–212.
8. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академпериодика, 2006. 472 с.
9. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. 542 с.

Three-dimensional stability of non-thin anisotropic cylindrical shells under axial pressure

V. Trach; A. Podvornyi; N. Zhukova

Abstract. *Based on the modified Hu-Washizu variational principle, a three-dimensional system of homogeneous linearized differential equations of stability of non-thin anisotropic cylindrical shells is obtained. The anisotropy type of shells is characterized by one plane of elastic symmetry. Reducing the system to a one-dimensional one is carried out using the Bubnov-Gal'orkin method, which approximates the functions of unknown systems of equations along the generatrix and takes into account their periodicity in the circumferential direction. The numerical solution of the obtained one-dimensional system of equations is carried out using the discrete orthogonalization method.*
The problem of stability of a non-thin anisotropic cylindrical shell for a different number of cross-laid composite layers against the action of axial pressure is solved. The nature of the dependence of critical forces on the number of layers is analyzed.
Keywords: *Hu-Washizu principle; anisotropic cylindrical shells; stability.*