УДК 539.3 DOI: 10.20535/2409-7160.2023.XXIII.278107

Напружено-деформований стан нестисливого попередньо напруженого півпростору із захисним покриттям при дії рухомого навантаження

Ю.П. Глухов
Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАНУ, Київ, Україна

Анотація. *Робота присвячена вивченню впливу захисного покриття, початкових напружень, механічних характеристик матеріалів, параметрів руху поверхневого навантаження на напружено-деформований стан пружної основи. Розглядається попередньо напружений нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Зосереджена сила рухається по вільній поверхні захисного шару з постійною швидкістю під певним кутом до поверхні півпростору. Розв’язок задачі отриманий із застосуванням методу інтегральних перетворень Фур’є. Для числового аналізу розглядався матеріал з потенціалом Бартенєва-Хазановича. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень, механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану. Актуальність результатів дослідження пов’язана з можливістю їх використання при створенні якісно нових матеріалів, конструкцій і будівельних споруд.*

Ключові слова: *шаруватий нестисливий півпростір; початкові напруження; рухоме навантаження*

Розглядається попередньо напружений нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Граничні поверхні плоскі і паралельні між собою. Матеріал півпростору – ізотропний в ненапруженому стані. Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним.

Шар і півпростір віднесені до декартової системи координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3), які вводяться в початковому деформованому стані. Координатна площина $\xi_1 O \xi_3$ співпадає з вільною поверхнею захисного шару. Координати рухомої системи координат визначаються співвідношеннями $y_1 = \xi_1 - \text{v}t$, $y_2 = \xi_2$.

Зосереджена сила інтенсивності P рухається по вільній поверхні захисного шару $(\xi_2 = 0)$ з постійною швидкістю v під кутом α до поверхні півпростору на протязі великого проміжка часу.

Передбачається, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

Також передбачається, що напруження, що виникає за рахунок дії навантаження, значно менше за початкові напруження. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для опису додаткового напруженного стану, викликаного дією навантаження.

Шар товщиною h моделюється зосередженими масами з густиною ρ_1. Таким чином, нормальна і дотична складові навантаження будуть $\left(P\sin\alpha + \rho_1 h\ddot{u}_1\right)\delta(y_1)$ і $\left(P\cos\alpha + \rho_1 h\ddot{u}_2\right)\delta(y_1)$. Тут u_1, u_2 - переміщення точок півпростору.

При таких припущеннях з урахуванням загальних розв’язків плоских динамічних задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями рівняння руху півпростору можна записати у вигляді [1]

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \tag{1}$$

Функції η_j в рівняннях руху (1) визначаються з рівняння

$$\eta^4 + 2A\eta^2 + A_1 = 0, \tag{2}$$

де для нестисливого тіла

$$2A\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2\tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2\left(\tilde{\kappa}_{1111} - \tilde{\rho}v^2\right) - 2\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}\left(\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}\right);$$

$$A_1\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2\left(\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho}v^2\right);\;\; \tilde{q}_{tj} = \delta_{tj}\lambda_t q_t;\;\; \tilde{\rho} = \rho;$$

λ_t − відносне видовження, ρ − щільність матеріалу півпростору в природному стані, q_t, $\tilde{q}_{tj}$, $\tilde{\kappa}$ − параметри, що характеризують матеріал півпростору [1].

Значення функцій η_1^2 і η_2^2 визначають вид рівнянь руху (1) і відповідно вибір форми розв'язку рівнянь, що розглядаються.

Вивчається два варіанти контакту між шаром і основою: жорсткий і нежорсткий. Межа розділу захисного шару і півпростору: $y_2 = -h$. Умови контакту в загальному вигляді при $y_2 = -h$ можна записати

$$\left(2\delta_1 - 1\right)\tilde{Q}_{21} = \delta_1\left(P_1 + \rho_1 h\ddot{u}_1\right)\delta(y_1);\quad \tilde{Q}_{22} = \left(P_2 + \rho_1 h\ddot{u}_2\right)\delta(y_1). \tag{3}$$

В виразах (3) $\tilde{Q}_{21}$ і $\tilde{Q}_{22}$ − дотичне та нормальне напруження в півпросторі відповідно, $\delta_1 = 1$ відповідає жорсткому контакту, а $\delta_1 = 0$ − нежорсткому контакту між елементами шаруватого середовища, $\delta(y_1)$ − дельта-функція Дірака, що дозволяє записати дію зосередженого рухомого навантаження в точці $y_1 = 0$.

Таким чином, задача зводиться до визначення функцій $\chi^{(j)}$ з допомогою рівнянь (1) при граничних умовах (3).

Розв'язок задачі отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є по змінній y_1

$$f^F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1)\,\mathrm{e}^{-iky_1}\,dy_1 .$$

В просторі зображень Фур'є розв'язок шукаємо у вигляді

$$\chi^{(j)F} = \tilde{\alpha}_0^{-1}\left[1 - \delta_{j2}(1 - \delta_{\mu_1\mu_2})\right]\left\{C_1^{(j)}\mathrm{e}^{k_1 k\eta_1(y_2+h)} + \left[1 - \delta_{\mu_1\mu_2} + \delta_{\mu_1\mu_2}k_2 k\eta_2\left(y_2 + h\right)\right]C_2^{(j)}\mathrm{e}^{k_2 k\eta_2(y_2+h)}\right\};$$

$$\delta_{j2} = \begin{cases} 0, & j = 1; \\ 1, & j = 2; \end{cases}\quad \delta_{\mu_1\mu_2} = \begin{cases} 1, & \eta_1 = \eta_2 \\ 0, & \eta_1 \neq \eta_2 \end{cases}; \tag{4}$$

де $C_m^{(j)}$ $(m = 1,2)$ − сталі інтегрування.

В (4) $k_j \equiv \sigma = |k|/k$, якщо $\eta_j^2 > 0$, $k_j = i$, якщо $\eta_j^2 < 0$. В випадку, коли η_j приймає комплексні значення, то в представленні розв'язку (4) необхідно прийняти $k_j = 1$; $\eta_j = \sigma\,\mathrm{Re}\,\eta_j - (-1)^j i\,\mathrm{Im}\,\eta_j$. Для кінцевості значень функцій $\chi^{(j)}$ необхідно, щоб $\mathrm{Re}\,\eta_j > 0$.

Аналітичні результати отримані в загальному вигляді для матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвукової і надзвукової).

Розрахунки були проведені в рамках теорії скінченних початкових деформацій для потенціалу Бартенєва-Хазановича. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень та умов контакту елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану.

При розрахунках вважалося, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє.

Досліджувались швидкості навантаження в дозвуковому і надзвуковому діапазонах. У дозвуковому діапазоні були досліджені тільки докритичні швидкості навантаження [2]. Нижче приведені деякі з отриманих результатів.

На рис. 1–4 показаний розподіл узагальненого напруження $\tilde{Q}_{22}$ в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 0{,}1c_0^2$. Тут c_0 − швидкість поперечних хвиль у півпросторі без початкових напружень. Криві 1, 2, 3, 4 і 5 на рис. 1−4 відповідають значенням $\lambda_1 = 0{,}8$, $\lambda_1 = 0{,}9$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 1{,}1$ і $\lambda_1 = 1{,}2$. Для показаних епюр: рис. 1 − $\delta_1 = 0$, $\rho/\rho_1 = 0{,}5$, $\alpha = \pi/2$; рис. 2 − $\delta_1 = 0$, $\rho/\rho_1 = 0{,}25$, $\alpha = \pi/2$; рис. 3 − $\delta_1 = 1$, $\rho/\rho_1 = 0{,}5$, $\alpha = \pi/2$; рис. 4 − $\delta_1 = 1$, $\rho/\rho_1 = 0{,}5$, $\alpha = \pi/4$.

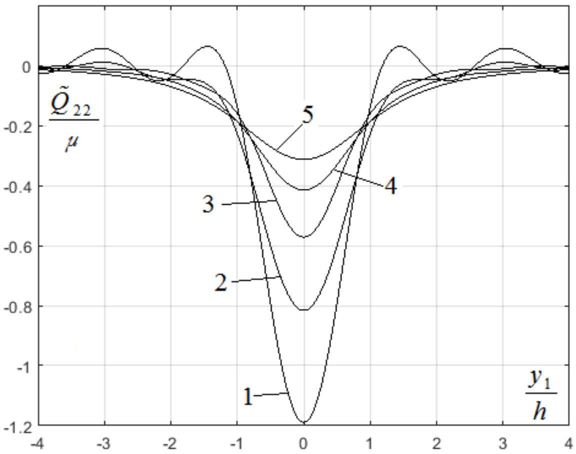

Рис. 1

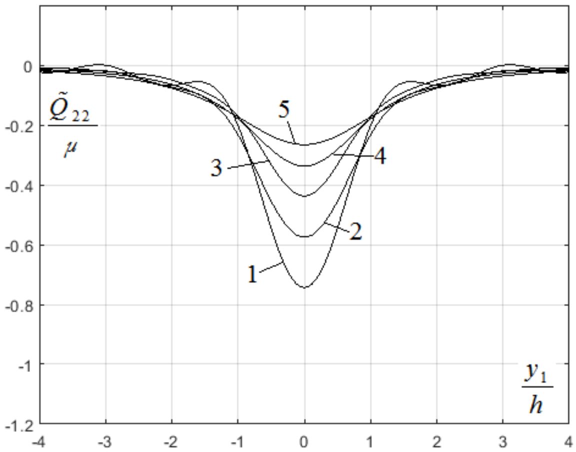

Рис. 2

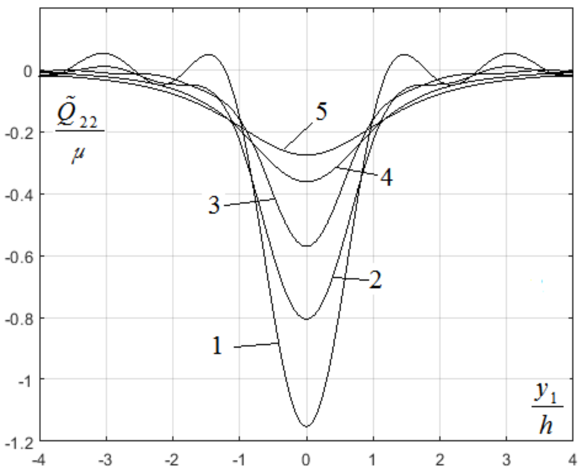

Рис. 3

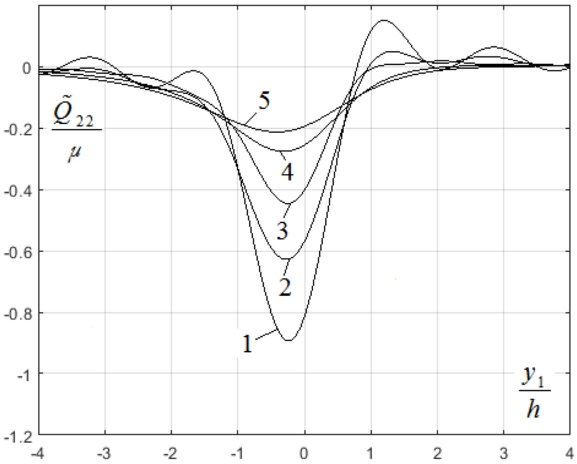

Рис. 4

У випадку надзвукової швидкості, зміна узагальненого напруження $\tilde{Q}_{22}$ в півпросторі в залежності від відстані до точки прикладання навантаження показана на рис. 5 і 6. Рис. 5 відповідає жорсткому контакту між поверхневим шаром і півпростором ($\delta_1 = 1$), а рис. 6 − нежорсткому контакту ($\delta_1 = 0$). Швидкість навантаження становила $v^2 = 2c_0^2$; Решта параметрів мали значення: $\rho/\rho_1 = 0{,}5$; $\alpha = \pi/2$. Умовні позначення на рис. 5 і 6 такі ж, як і на рис. 1−4.

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан в конкретній точці шаруватого середовища, залежить від координат точки, яка досліджується, від траєкторії та швидкості руху поверхневого навантаження, механічних параметрів елементів шаруватого середовища та умов їх контакту.

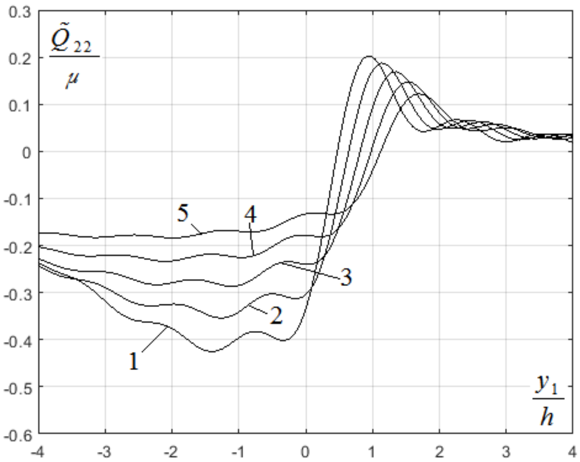

Рис. 5

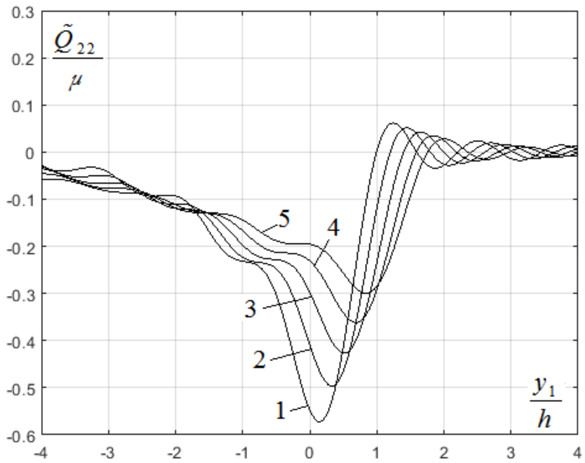

Рис. 6

Отримані оцінки можуть бути використані для дослідження більш складних моделей шаруватих конструкцій при динамічних навантаженнях.

Список літератури

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: “А.С.К”, 2004. 672 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.

The stress-strain state of an incompressible prestressed half-space with a protective coating under the action of a moving load

Yu. Glukhov

Abstract. *This work is devoted to the study of the influence of the protective coating, initial stresses, mechanical characteristics of materials, movement parameters of the surface load on the stress-deformed state of the elastic base. A prestressed incompressible half-space with inhomogeneity in the form of a thin surface layer is considered. The concentrated force moves along the free surface of the protective layer at a constant speed at a certain angle to the surface of the half-space.The solution of the problem was obtained using the method of integral Fourier transformations.The material with the Bartenev-Khazanovich potential was considered for numerical analysis. The calculations were carried out within the framework of the theory of finite initial deformations.The impact of the moving load, initial stresses and mechanical parameters of the elements of the layered base on the main characteristics of its stress-strain state was studied. The relevance of the research results is related to the possibility of their use in the creation of qualitatively new materials, structures and building structures.*

Keywords: *layered incompressible half-space, initial stresses, moving load*