

Термоелектромеханічна поведінка тривимірної шаруватої п'єзоелектричної в'язкопружної циліндричної панелі при вимушених коливаннях

В.І. Козлов, Л.П. Зінчук, Ю.І. Лелюх

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ, Київ, Україна

***Анотація.** У роботі представлено чисельну методику розв'язування задач про вимушені коливання і дисипативний розігрів в'язкопружних тривимірних п'єзоелектричних тіл обертання. Знаходження розв'язку таких задач зводиться до розв'язування послідовності лінійних задач електров'язкопружності з комплексними електромеханічними характеристиками і задач нестационарної теплопровідності з відомим джерелом тепла. Розроблена методика розв'язання зазначених лінійних задач електромеханіки і теплопровідності ґрунтується на методі скінченних елементів у варіаційній постановці. Представлено результати чисельного моделювання термоелектромеханічної поведінки тришарової в'язкопружної п'єзоелектричної циліндричної панелі у випадку жорсткого закріплення її торців при механічному гармонічному навантаженні. Досліджено вплив величини механічного навантаження на амплітудно-частотні та температурно-частотні характеристики в околі першого резонансу.*

Ключові слова: вимушені коливання; дисипативний розігрів; циліндрична панель; метод скінченних елементів; рівняння теплопровідності; в'язкопружний п'єзоелектричний матеріал.

Вступ. У багатьох галузях сучасної техніки знаходять широке застосування елементи конструкцій з в'язкопружних п'єзоелектричних матеріалів. Досить часто подібні елементи мають вигляд просторових тіл обертання. При дії на них механічних чи електричних гармонічних навантажень в таких тілах можуть виникати інтенсивні коливання, які часто призводять до руйнування конструкції через різке зростання температури дисипативного розігріву і, відповідно, рівня допустимих навантажень. Особливо важливу роль дисипативний розігрів відіграє при резонансних коливаннях, що призводить до необхідності постановки і розв'язування зв'язаних задач механіки деформівного твердого тіла, коли необхідно враховувати взаємодію механічних, електричних і температурних полів.

При розробці чисельно-аналітичних методів дослідження гармонічних коливань в'язкопружних п'єзоелектричних тіл використовується підхід, який ґрунтується на концепції комплексних характеристик матеріалу [1–3]. Термоелектромеханічна поведінка гнучких непружних елементів конструкцій з п'єзоелектричними включеннями при гармонічних коливаннях з урахуванням дисипативного розігріву, фізичної і геометричної нелінійностей та інших факторів вивчалась, зокрема, у роботах [4–6].

У даній роботі розроблена чисельна методика, на основі якої досліджено вимушені коливання і дисипативний розігрів тришарової в'язкопружної п'єзоелектричної панелі у тривимірній постановці для випадку жорсткого закріплення торців при механічному гармонічному навантаженні.

Постановка задачі та методика розв'язування. Задача про коливання та дисипативний розігрів тривимірних в'язкопружних п'єзоелектричних тіл зводиться до розв'язування комплексних тривимірних рівнянь руху і рівнянь електростатики

$$\sigma_{kl,l} + \rho \omega^2 u_k = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 0, \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (1)$$

та осередненого за період рівняння енергії [1]

$$c_p \dot{T} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - F^D = 0. \quad (2)$$

В (1) використано відомі позначення густини ρ ; кругової частоти ω ; компонент тензора напружень σ_{kl} ; зміщень u_k ; векторів індукції \vec{D} , напруженості \vec{E} та потенціалу ϕ електростатичного поля. У рівнянні (2) T – осереднена за період коливань температура, λ – коефіцієнт теплопровідності, c – питома теплоємність, F^D – дисипативна функція, яка визначається за формулою

$$F^D = \frac{\omega}{2} (\sigma_{ij}'' \varepsilon_{ij}' - \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}'' + D_i' E_i'' - D_i'' E_i'). \quad (3)$$

У формулі (3) через ε_{ij}' , ε_{ij}'' , ... позначено дійсну та уявну частину відповідних величин.

Кінематичні рівняння мають стандартний вигляд малих деформацій Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (4)$$

Вважаємо, що електромеханічна поведінка непружного п'єзоелектричного матеріалу описується концепцією комплексних характеристик, при цьому комплексні рівняння стану мають вигляд [1]

$$\sigma_{kl} = c_{klj}^E \varepsilon_{ij} - e_{klm} E_m, \quad (5)$$

$$D_k = e_{klm} \varepsilon_{lm} + \gamma_{km}^S E_m. \quad (6)$$

Для конкретизації задачі термоелектромеханіки потрібно додати відповідні граничні та початкові умови [1].

Для розв'язування системи рівнянь (1)–(6) з комплексними коефіцієнтами, яка описує коливання і дисипативний розігрів в'язкопружних п'єзоелектричних просторових тіл, було використано метод скінченних елементів (МСЕ).

Відповідно до методології МСЕ [1,2] введемо наступний функціонал:

$$E = \frac{1}{2} \int_V (c_{klj}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - 2e_{klm} \varepsilon_{kl} E_m - \gamma_{km}^S E_m E_k - \rho \omega^2 u_k u_k) dV - \int_S (p_{nk} u_k - q^e \phi) dS. \quad (7)$$

Варіаційне рівняння $\delta E = 0$ представляє собою узагальнення варіаційного рівняння Лагранжа [1] для випадку електров'язкопружного тіла з якого впливає система диференціальних рівнянь (1) з врахуванням фізичних рівнянь (5), (6).

Для розв'язування варіаційного рівняння $\delta E = 0$ у циліндричній системі координат (r, z, θ) використовуються описані у [2] 24-х вузлові шестигранні ізопараметричні елементи з квадратичною апроксимацією компонент вектора переміщень і електричного потенціалу в елементі по координатам r і z . Основною їх особливістю є апроксимація невідомих функцій в окружному напрямку тригонометричним поліномами, які представляють три перші члени ряду Фур'є: $H(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta$.

Використовуючи стандартну процедуру МСЕ, з умови стаціонарності функціоналу (7) одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень компонент вектора зміщень і потенціалу, яка розв'язується в області комплексних чисел методом Гауса.

Для знаходження розв'язку задачі нестационарної теплопровідності (2) з відомим джерелом тепла використано варіаційне рівняння

$$\delta I = 0,$$

де

$$I = \frac{1}{2} \int_V \left(\lambda_{ij} T_{,i} T_{,j} + c\rho \frac{dT}{dt} T - 2F^D T \right) dV + \frac{1}{2} \int_S \alpha_T (T - 2T_c) T dS.$$

Задача нестационарної теплопровідності розв’язується методом скінченних елементів на тій самій сітці, що і задача електров’язкопружності за методикою, що описана в [1, 2].

Результати чисельних розрахунків та їх аналіз. Як приклад застосування описаного вище підходу до розв’язування просторових задач дослідимо коливання і дисипативний розігрів тришарової циліндричної панелі товщиною $H = 2h_1 + h_2$, де h_1 – товщина зовнішніх шарів, виготовлених із п’єзокераміки PZT (EC-65) з радіальною поляризацією та однаковими властивостями, h_2 – товщина внутрішнього шару з пасивного матеріалу –

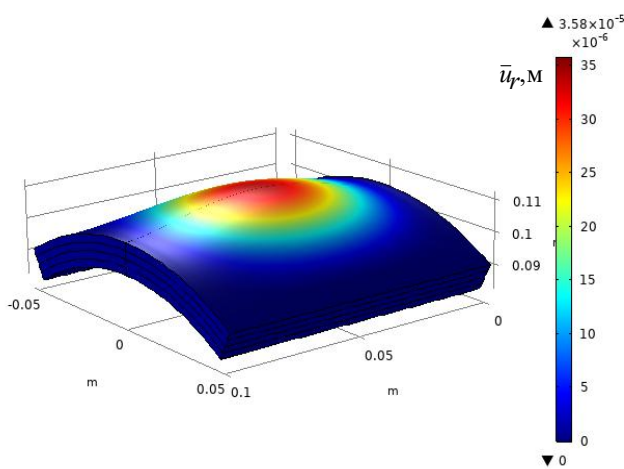


Рис. 1. Розподіл модуля амплітуди радіальної компоненти вектора переміщень

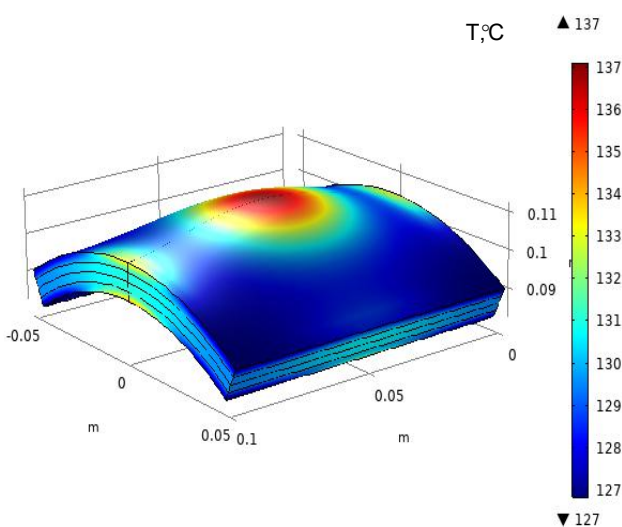


Рис. 2. Розподіл температури дисипативного розігріву

алюмінію. На п’єзошари нанесено нескінченно тонкі електроди. Торці панелі є жорстко защемленими (зміщення на них дорівнюють нулю), а на поверхнях між шарами виконуються умови ідеального контакту. На внутрішніх та зовнішніх електродах підтримується нульове значення потенціалу. Тут розглянуто випадок, коли панель знаходиться під дією поверхневого внутрішнього тиску $P = P_0 \cos(\omega t)$, що змінюється за гармонічним законом з частотою, близькою до резонансної. Геометричні параметри панелі обирались такими: $R = 0,1$ м (радіус серединної поверхні), $h_1 = 0,0025$ м, $h_2 = 0,005$ м, $L = 0,1$ м, $\theta_0 = \pi/3$ (центральний кут панелі).

Механічні характеристики внутрішнього алюмінієвого шару приймалися наступними: $\lambda = 200 \text{ Вт}/(\text{м} \times ^\circ\text{C})$, $E = 7,3 \times 10^{10} \text{ Н}/\text{м}^2$, $\rho = 0,27 \times 10^4 \text{ кг}/\text{м}^3$, $\nu = 0,34$. Для зовнішніх шарів комплексні характеристики матеріалу PZT (EC-65) наведено в [7]. Коефіцієнт теплопровідності і густина вказаного п’єзоматеріалу обирались такими: $\lambda = 1,25 \text{ Вт}/(\text{м} \times ^\circ\text{C})$ і $\rho = 7,5 \times 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$. Передбачалось, що панель знаходиться в умовах теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого $T_c = 20^\circ\text{C}$. Коефіцієнт тепловіддачі між зовнішнім середовищем й панеллю є сталим: $\alpha_T = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \times ^\circ\text{C})$.

Рис. 1, 2 представляють відповідно розподіл модуля амплітуди радіальної компоненти вектора зміщень $\bar{u}_r = |u_r|$ і температури дисипативного розігріву T (на 600 С розігріву) на першій резонансній частоті $\omega = 46487$ рад/с у розглянутій шаруватій циліндричній панелі. Обчислені модулі амплітуд для осьової та окружної компонент вектора переміщень є за максимальними значеннями відповідно на один порядок та у чотири рази нижчими і мають інший характер розподілу у просторі.

На рис. 3, 4 показана частотна залежність модуля амплітуди радіальної компоненти вектора зміщень і температури дисипативного розігріву (на 600 С розігріву) в точці серединної поверхні, яка лежить у перерізі $z = 0$, $R = 0,1$ м, $\theta = 0$, в околі першого резонансу. Тут введено наступні позначення: $\tilde{u}_r = |u_r| \times 10^5$ м, $\tilde{\omega} = \omega \times 10^{-4}$ рад/с. Суцільні криві відповідають механічному навантаженню з параметром $P_0 = 0,1 \times 10^5$ Н/м², а штрихові криві – $P_0 = 0,2 \times 10^5$ Н/м².

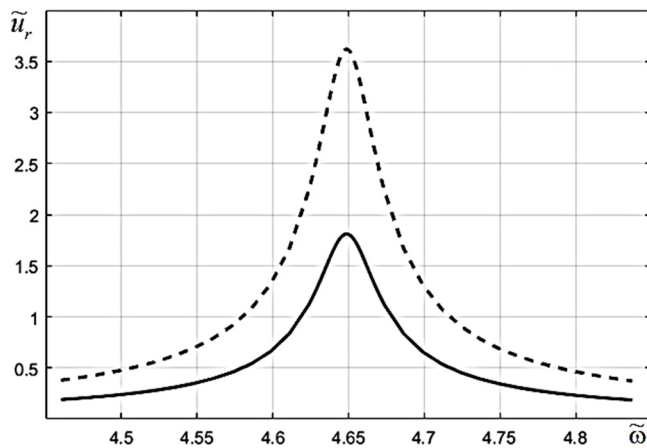


Рис. 3. Амплітудно-частотні характеристики в околі першого резонансу

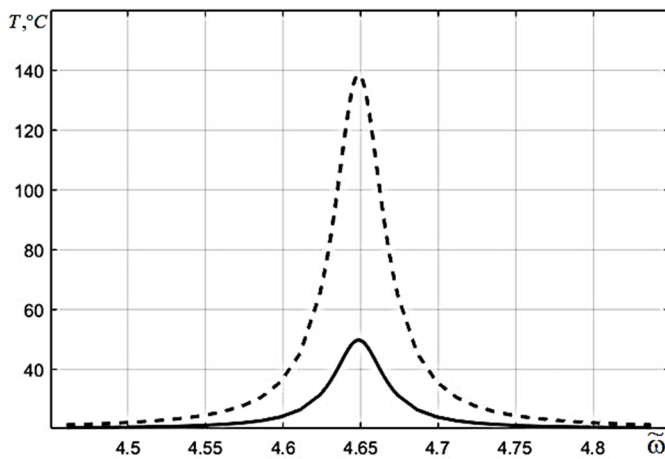


Рис. 4. Температурно-частотні характеристики в околі першого резонансу

Аналіз амплітудно- та температурно-частотних характеристик в околі першого резонансу показує, що збільшення механічного навантаження у два рази призводить до збільшення температури дисипативного розігріву приблизно у три рази, а модуля амплітуди радіального зміщення удвічі.

При моделюванні поведінки в'язкопружної тришарової циліндричної п'єзоелектричної панелі було встановлено, що у випадку розглянутих граничних умов з жорстко защемленими торцями суттєво на точність знаходження резонансних частот впливало розбиття на скінченні елементи по координатам z і θ , що вимагало використання достатньо щільної сітки запропонованих елементів. У випадку шарнірного закріплення торців циліндричної панелі такої залежності не спостерігалось і при числових розрахунках було використано значно менше скінченних елементів для одержання бажаної точності.

Висновки

У даній доповіді представлено методика дослідження задач про вимушені коливання і дисипативний розігрів тривимірних шаруватих тіл обертання, які виготовлено із в'язкопружних п'єзоелектричних матеріалів.

Знаходження розв’язку таких задач зводиться до розв’язування послідовності лінійних задач електров’язкопружності з комплексними характеристиками і задач нестационарної теплопровідності з відомим джерелом тепла. В основу запропонованої чисельної методики розв’язання зазначених лінійних задач електромеханіки і теплопровідності покладено використання розробленого авторами варіанту методу скінчених елементів у тривимірній варіаційній постановці. З використанням розробленого програмного комплексу проведено чисельне моделювання динамічної поведінки в’язкопружної п’єзоелектричної тришарової циліндричної панелі у випадку жорсткого закріплення торців при механічному гармонічному навантаженні. Досліджено вплив величини механічного навантаження на амплітудно-частотні та температурно-частотні характеристики в околі першого резонансу.

Список літератури

1. V. G. Karnaukhov and V. V. Mihailenko, *Nelineynye odnochastotnye kolebaniya i dissipativnyi razogrev neuprugikh piezoelektricheskikh tel.* Zhitomir, Ukraine: ZhGNU, 2005.
2. V. H. Karnaukhov, V. I. Kozlov, V. M. Sichko, and A. V. Zavorodnii, *Tryvymiri zadachi pro kolyvannia i dysypatyvnyi rozihriv til obertannia z pasyvnykh i piezoaktyvnykh v'язkopruznykh materialiv.* Mykolaiv, Ukraine: Ilion, 2017.
3. V. G. Karnaukhov, I. F. Kirichok, and V. I. Kozlov, “Thermomechanics of inelastic thin-walled structural members with piezoelectric sensors and actuators under harmonic loading,” *International Applied Mechanics*, vol. 53, no. 1, pp. 6–58, 2017. DOI: 10.1007/s10778-017-0789-3
4. I. F. Kirichok, Y. A. Zhuk, and S. Yu. Kruts, “Accounting for shear deformation in the problem of vibrations and dissipative heating of flexible viscoelastic structural element with piezoelectric sensor and actuator,” in *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics*, V.A. Sadovnichiy and M.Z. Zgurovsky, Eds. Springer, Cham, 2021, pp. 51 – 69. DOI: 10.1007/978-3-030-50302-4_4
5. V. I. Kozlov, L. P. Zinchuk, and T. V. Karnaukhova, “Nonlinear vibrations and dissipative heating of laminated shells of piezoelectric viscoelastic materials with shear strains,” *International Applied Mechanics*, vol. 57, no. 6, pp. 669–686, 2021. DOI: 10.1007/s10778-022-01117-6
6. I. F. Kirichok and O. A. Cherniushok, “Thermomechanical behavior and durability of shear-compliant inelastic shells of revolution with piezoelectric pads during axisymmetric resonant vibrations,” *International Applied Mechanics*, vol. 58, no. 2, pp. 180–188, 2022. DOI: 10.1007/s10778-022-01145-2
7. R. G. Sabat, B. K. Mukherjee, W. Ren, and G. Yung, “Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics,” *J. Appl. Phys.*, vol. 101, no. 6, 064111, 2007. DOI:10.1063/1.2560441

Thermoelectromechanical behavior of three-dimensional layered piezoelectric viscoelastic cylindrical panel under forced vibrations

V. Kozlov, L. Zinchuk, Yu. Lelyukh

Abstract. *The paper presents a numerical technique for solving problems of forced vibrations and dissipative heating of viscoelastic three-dimensional piezoelectric bodies of revolution. Finding a solution to such problems is reduced to solving a sequence of linear problems of electroviscoelasticity with complex electromechanical characteristics and problems of non-stationary thermal conductivity with a known heat source. The developed technique for solving the specified linear problems of electromechanics and heat conduction is based on the method of finite elements in the variational formulation. The results of numerical modeling of the thermoelectromechanical behavior of a three-layer viscoelastic piezoelectric cylindrical panel in the case of rigid fixation of its ends under mechanical harmonic loading are presented. The influence of the magnitude of the mechanical load on the amplitude-frequency and temperature-frequency characteristics in the vicinity of the first resonance was investigated.*

Keywords: *forced vibrations; dissipative heating; cylindrical panel; finite element method; heat conduction equation; viscoelastic piezoelectric material.*