УДК 539.3

Нелінійні в’язкопружні властивості композитних еластомерів періодичної структури при циклічному навантаженні

Б.П. Маслов
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Анотація. *Розв’язано задачу нелінійної теорії спадкової повзучості другого порядку композитних еластомерів регулярної структури. Спадкові функціонали дробового степеню використано для побудови загальних визначальних рівнянь напруженого стану. Узагальнено принцип відповідності Шепері для квазілінійних середовищ в умовах спадкової циклічної повзучості. Відзначено можливість прогнозування довготривалої міцності твердопаливного композитного блоку. Комп’ютерна програма Wolfram Mathematica 14.1 використовується для чисельного аналізу та ілюстрації.*

Ключові слова. *Спадкова повзучість; циклічне навантаження; періодична структура; комплексні модулі; інтегральні перетворення.*

Композитні еластомери періодичної структури в сучасній класифікації механічних метаматеріалів відносяться до групи із певними механічними властивостями [1], що виникають із геометрії їхніх субодиниць, а не тільки зі складу матеріалу [2], [3]. Поняття метаматеріалу було запроваджено від електромагнетики та акустики до механіки. Композитні структури є об’єктом досліджень механіки довготривалого деформування і руйнування [4]–[7], але методи тривимірного аналізу та проектування цих інженерних мікроструктур лише з’являються. Як правило, метаматеріали мають різноманітні, значно покращені механічні властивості зокрема такі, як нульовий або від’ємний коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву, що зникає, суттєво нелінійну залежну у часі поведінку та інші особливості, що відрізняють їх від звичайних природних та композитних структур. Одним з важливих прикладів таких метаматеріалів є сучасні твердопаливні блоки [8]. Твердопаливні ракетні двигуни (ТРД) широко застосовуються в якості основної силової установки стратегічних та тактичних ракет, таких як далекобійні високоточні ударні ракети, ракети протиповітряної оборони і т. інш. Паливний блок виконує роль основного компоненту і джерела енергії ТРД. Структурна цілісність паливного блоку відіграє значну роль у гарантуванні надійної, безпечної та стабільної роботи ТРД. Типовий твердий паливний матеріал складається з полімерного сполучного, окислювача, металевого палива та деяких інших добавок для поліпшення експлуатацційних характеристик. Тому вивчення особливостей механічної і в’язкопружної поведінки для структурної цілісності паливного блоку є складною проблемою та привертає все більшу увагу дослідників [9], [10].

На відміну від чисто пружних або в’язких гетерогенних середовищ, у спадкових композитних матеріалах зв’язок між консервативним і дисипативним механізмами деформації може призводити до появи нових ефективних властивостей, які є відсутніми у масштабі окремих компонентів [8], [9]. Це можна підтвердити використанням принципу відповідності [6], який дозволяє перетворити в’язкопружну задачу на символічно пружну в області змінних перетворення Лапласа–Карсона. Має практичний інтерес використання комплексних наведених властивостей, що характеризують реакцію композитного середовища на циклічні навантаження [9], [10].

1. Постановка задачі

З принципу суперпозиції Больцмана реакцію на напруження лінійного спадкового в’язкопружного матеріалу при заданій історії деформації $\mathbf{e}(u)$, $u \in [0;t]$ з початковою умовою $\boldsymbol{\sigma}(t=0)=0$, можна записати [1]:

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\frac{d}{dt}[\int_0^t \mathbf{R}(t-u)\mathbf{e}(u)]du \qquad (1)$$

з $\mathbf{R}(t)$ тензором в'язкопружної жорсткості (функцією релаксації) або, в короткій формі запису

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)=(\mathbf{R}*d\mathbf{e})(\mathbf{x},t).$$

Тут $*$ позначає добуток інтегральної згортки. По всьому тексту тензори виділено жирним шрифтом. Подібним чином, реакція деформації $\mathbf{e}(t)$ на історію напружень $\boldsymbol{\sigma}(u), u\in[0;t]$, і початковою умовою $\mathbf{e}(t=0)=0$, записується:

$$\mathbf{e}(t)=(\mathbf{J}*d\boldsymbol{\sigma})(t) \qquad (2)$$

$\mathbf{J}(t)$ – тензор в'язкопружної податливості (функція повзучості), загальний вигляд якої:

$$\mathbf{J}(t)=\mathbf{S}+\frac{1}{\boldsymbol{\eta}_r}t+\int_0^\infty \mathbf{H}(\tau)(1-e^{-t/\tau})d\tau \qquad (3)$$

з $\mathbf{S}$ пружна податливість, $\frac{1}{\boldsymbol{\eta}_r}$ ретардована в'язка податливість та $\mathbf{H}$ спектр ретардації. Спектри релаксації та ретардації характеризують в'язкопружний перехідний процес довготривалої реакції матеріалу. Надалі застосовуємо постановку задачі в термінах квазилінійної спадкової повзучості з дробовими визначальними рівняннями [1], [8]. Визначальне рівняння має форму (1) з дробовою функцією релаксації $\mathbf{R}_\mu(t)$:

$$\mathbf{R}_\mu(t)=\mathbf{C}_r+\int_0^{+\infty}\mathbf{G}(\tau)E_\mu[-(t/\tau)^\mu]d\tau$$

де $E_\mu(t)$ – функція Міттаг-Леффлера. Очевидно, що при $\mu=1$ функція релаксації $\mathbf{R}_\mu(t)$ відповідає класичній функції релаксації $\mathbf{R}(t)$.

2. Циклічне навантаження багатокомпонентних еластомерів

Локальна задача для гармонічних навантажень розв'язується за принципом відповідності перетворенням задачі дробової в'язкопружності в задачу символічної пружності. Задача від часу переноситься на LC-область і дозволяє визначити модулі, що характеризують в'язкопружну реакцію матеріалу. Розглядаємо неоднорідне середовище, що займає об'єм Ω, і складається з N однорідних фаз із характеристичною функцією $\chi^{(s)}(\mathbf{x})$ та об'ємом $\Omega^{(s)}$, $(s\in[0;N])$. Крім того, передбачається, що $\Omega^{(s)} << \Omega$ і що фази ідеально з'єднані. Дробову спадкову релаксаційну функцію фази (s) позначимо $\mathbf{R}_\mu^{(s)}(t)$. Звідси випливає, що локальний тензор релаксації $\mathbf{R}_\mu(\mathbf{x},t)$ має вигляд:

$$\mathbf{R}_\mu(\mathbf{x},t)=\sum_{s=1}^{N}\mathbf{R}^{(s)}(t)\chi^{(s)}(\mathbf{x})$$

з $\chi^{(s)}(\mathbf{x})=1$, якщо $\mathbf{x}\in\Omega^{(s)}$ і 0 інакше. Середні значення по області Ω і $(\Omega^{(s)}$ позначаються відповідно $\langle\cdot\rangle$ і $\langle\cdot\rangle^{(s)}$. За визначенням характеристична функція, об'ємна частка фази (s), становить $c_s=\langle\chi^{(s)}\rangle$. Об'ємні середні значення функції f по композиту Ω і по фазі $\Omega^{(r)}$ позначені відповідно.

Реакцію в'язкопружного неоднорідного середовища на синусоїдальне навантаження трансформуємо в спектральну область шляхом розгляду перетворення Лапласа–Карсона основного рівняння для чисто уявної змінної перетворення $z = i\omega, (i^2 = -1)$. Припускаючи загальне деформаційне навантаження $\overline{e}(t) = LC(\overline{e}^A) * e^{i\omega t}$, локальна гранична задача, що відповідає стаціонарному режиму на кутовій частоті ω записується як:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}, i\omega) = \mathbf{R}^*(\mathbf{x}, i\omega)\ \mathbf{e}^*(\mathbf{x}, i\omega), \qquad div\ \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}, i\omega) = \mathbf{0},$$

$$curl(curl\ \mathbf{e}^*(\mathbf{x}, i\omega)) = \mathbf{0}, \qquad \forall(\mathbf{x}, \omega) \in \Omega \times [0; +\infty] \tag{4}$$

із заданими граничними умовами $\langle \mathbf{e}^* \rangle = \overline{\mathbf{e}}^*$. Визначальне рівняння в комплексній області записуємо:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle (i\omega) = \widetilde{\mathbf{R}}^*_{\mu}(i\omega) \langle \mathbf{e}^* \rangle (i\omega), \qquad \forall \omega \in [0; +\infty[, \tag{5}$$

тоді тензор релаксації представимо як суму:

$$\widetilde{\mathbf{R}}^*_{\mu}(i\omega) = \widetilde{\mathbf{R}}_{\mu'}(\omega^{\mu}) + i\widetilde{\mathbf{R}}_{\mu''}(\omega^{\mu}). \tag{6}$$

Тут $\widetilde{\mathbf{R}}_{\mu'}(\omega^{\mu})$, $\widetilde{\mathbf{R}}_{\mu''}(\omega^{\mu})$ наведені модулі накопичення і розсіювання, пропорційні накопиченій та розсіяній енергії. Оскільки $i^{\mu} = e^{i\pi\mu/2}$, то

$$\widetilde{\mathbf{R}}_{\mu'}(\omega^{\mu}) = \widetilde{\mathbf{C}}_r + \int_0^{+\infty} \frac{1}{q}[\theta cos(\frac{\pi\mu}{2}) + \theta^2]\widetilde{\mathbf{G}}(\tau)d\tau,$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_{\mu''}(\omega^{\mu}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{q}[\theta sin(\frac{\pi\mu}{2})]\widetilde{\mathbf{G}}(\tau)d\tau. \tag{7}$$

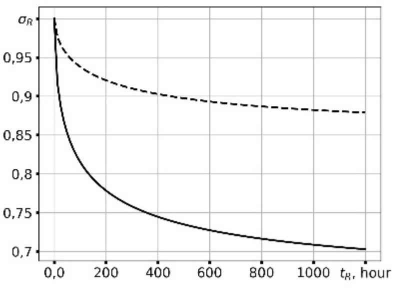
При цьому

$$\theta = (\omega\tau)^{\mu}, \qquad q = 1 + 2\theta cos(\frac{\pi\mu}{2}) + \theta^2.$$

Ефективний тензор розсіювання $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(\omega^{\mu})$, який характеризує затухання, визначається:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(\omega^{\mu}) = \widetilde{\mathbf{R}}''(\omega^{\mu})[\widetilde{\mathbf{R}}'(\omega^{\mu})]^{-1}. \tag{8}$$

3. Типовий приклад довготривалого деформування



Для прикладу розглянемо композит, утворений з твердого ракетного палива [8], армованого регулярно вкрапленими високомодульними доданками. Практичний інтерес представляє використання таких комплексних даних властивостей для характеристики реакції композитного середовища на циклічні навантаження. Наприклад, типовий твердий паливний блок складається з полімерного сполучного та інших добавок для поліпшення зчеплення і горіння [8], [9]. Тверде паливо демонструє чітку нелінійну в'язкопружну поведінку, що залежить від часу та температури, через несподіване поширення пошкоджень за різних умов навантаження та тиску. Тому вивчення механічних властивостей і в'язкопружної поведінки для структурної цілісності паливного блоку є метою практичного значення для забезпечення міцності і довговічності ракетно-космічної техніки. Для реалізації чисельного алгоритму використаємо в'язкопружні параметри матриці еластомеру $E_r = 7.29;\ \ E_i = 48.75;\ \ (MPa),\ \ \mu = 0.155;\ \ \tau = 4.92*10^{-7};\ \ (s)$. На рис. зображено порівняльні графіки залежності критичного напруження σ_R від часу t для чистої матриці (штрихова лінія) та для армованого еластомеру (суцільна). Програмний комплекс Wolfram Mathematica 14.1 [11], (ліцензія 8801-3966), використано для чисельного аналізу та підготовки ілюстративного матеріалу.

Висновки

Композитні еластомери застосовуються в елементах конструкцій, які експлуатуються як в умовах тривалих одноразових, так і циклічних навантажень. Їх міцність і довговічність композитів залежить від величини середніх або максимальних за цикл навантаження напружень в матриці, у включеннях, кількості циклів і т. д. У зв'язку з цим, для проектування нових метаматеріалів із заданими властивостями становить інтерес моделювання та вивчення мікроструктурних напружень і деформацій, що змінюються в часі. Велике практичне значення має прогнозування наведених макроскопічних характеристик спадкової повзучості та визначення їх залежності від форми включень, типу просторового армування, об'ємної концентрації компонентів. В роботі розглянуто композитний еластомер регулярної структури і використано метод усереднення, заснований на застосуванні принципу відповідності типу Шепері, інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа – Карсона. Для комп'ютерного моделювання використано чисельні алгоритми в середовищі Wolfram Mathematica 14.1. До переваг дослідження можна віднести отримання кінцевих результатів у формі визначальних співвідношень спадкової повзучості. А саме залежності деформацій від напружень, а не тільки релаксаційних співвідношень напруження – деформації.

Список літератури

1. Torrent D., Parnell WJ. Norris AN. Loss compensation in time-dependent elastic metamaterials. Phys. Rev. 2018. B 97, 014105.
2. T. W. Clyne and D. Hull, An Introduction to Composite Materials, Cambridge University Press: Cambridge, UK, 326 p. 2019, doi: 10.1017/CBO9781139170130
3. Maslov, B. Nonlinear Hereditary Creep of Transversely Isotropic Composites of Random Structure In: Advanced Structured Materials, 2023, 191. P. 367–390.
4. М. І. Бобир. Моделі та критерії руйнування композиційних матеріалів на стадії зародження макротріщин / Є. В. Лаврухін, М. І. Бобир // Mech. Adv. Technol., Vol. 8, No. 3, 2024, pp. 233–245. DOI: 10.20535/2521-1943.2024.8.3(102).309734
5. Маслов Б. П. Побудова критерію довготривалого руйнування внаслідок повзучості тонкостінних шаруватих структур // Прикл. Мех. 2024.- **60**, №5. С. 18–29.
6. M. I. Bobyr, "Criterion of the limit state of composites materials," Mech. Adv. Technol., Vol. 6, No. 3, pp. 229–236, 2022, doi: 10.20535/2521-1943.2022.6.3.264783
7. M. Bobyr "Damage contribution to the assessment of the stress-strain state of structure elements" / M. Bobyr and V. Koval // Journ. Strength of materials, vol. 49, No. 3, pp. 79–88, 2017. doi.org/10.1007/s11223-017-9876-2
8. Fang C., Shen X. Application of fractional calculus methods to viscoelastic behaviours of solid propellants. Phil. Trans. R. Soc. A 378. – 2020. 20190291. http://dx.doi.org/10.1098/rsta.
9. J. Lemaitre and R. Desmorat, Engineering Damage Mechanics, Springer, 2005.
10. R. Talreja, C. V. Singh, Damage and Failure of composite materials, Cambridge University Press, New York, 304 p., 2012, doi: 10.1017/CBO9781139016063
11. Wolfram Mathematica 14.1, https://www.wolframcloud.com

Nonlinear viscoelastic properties of composite elastomers of periodic structure under cyclic loading

B. Maslov
Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Abstract. *The problem of the nonlinear theory of hereditary creep of the second order of composite elastomers of regular structure has been solved. Hereditary functionals of fractional degree are used to construct general determinative stress equations. The principle of Schepery correspondence for quasilinear media under the conditions of hereditary cyclic creep has been generalized. The possibility of predicting the long-term strength of a solid fuel composite block is noted. The Wolfram Mathematica 14.1 computer program is used for numerical analysis and illustration.*
Keywords. *Hereditary creep; cyclic load; periodic structure; complex modules; integral transformations.*