

УДК 539.3

## Чисельно-аналітичний метод розвитку пошкоджень анізотропних пластин

Хуан Тао

КІП ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

**Анотація:** У цій роботі використано чисельний метод для дослідження еволюції пошкоджень двовимірних анізотропних пластин. Напружено-деформована поведінка анізотропних матеріалів в умовах плоских напружень описана в поєднанні з критерієм розрахунку ефективного напруження Хілла. Для визначення еволюції полів деформацій і пошкоджень використано методи скінченних елементів та інкрементного навантаження. Чисельне моделювання було інтегровано з Abaqus для моделювання, Matlab для визначення параметрів і ParaView для візуалізації. Валідація в умовах одновісного розтягування пластин з вуглепластику з центральними отворами показала, що пошкодження починається від краю отворів і поширюється всередину, що ефективно ілюструється контурами ізопошкоджень. Ці результати забезпечують теоретичну основу для оптимізації проектування та оцінки безпеки анізотропних пластин для інженерних застосувань.

**Ключові слова:** анізотропні; композиційні матеріали; чисельно-аналітичний метод; еволюція пошкоджень.

**Вступ** Анізотропні матеріали широко використовуються в аерокосмічній, автомобільній та будівельній галузях, особливо в конструкції композитних ламінатів. Зі зростанням вимог до властивостей матеріалів особливо важливим стає вивчення еволюції пошкоджень анізотропних матеріалів за складних умов навантаження, особливо для прогнозування і контролю розподілу полів пошкоджень у двовимірних пластинчастих структурах.

**Мета дослідження** Метою роботи є моделювання еволюції поля пошкоджень анізотропних 2D пластин за різних умов навантаження за допомогою чисельного аналізу. Досліджуються типові 2D шаруваті структури, включаючи ортотропні шаруваті пластини на основі композитів, армованих вуглецевим волокном (CFRP)[1]. Результати чисельного моделювання показують динамічну еволюцію пошкоджень за допомогою методів візуалізації (наприклад, карти переміщень, контурні графіки змінних пошкоджень), які забезпечують теоретичну основу для оптимізації проектування та оцінки структурної безпеки 2D пластин за складних умов експлуатації.

**Матеріали та методи дослідження** Залежність між напруженням і деформацією для двовимірного ортотропного анізотропного матеріалу може бути виражена в плоскому напруженому стані як[2]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

де  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненти напружень матеріалу,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  – компоненти деформацій матеріалу,  $Q_{ij}$  – компонент матриці жорсткості для ортотропних анізотропних матеріалів.

Компоненти матриці жорсткості пов'язані з параметрами матеріалу як:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2)$$

де  $E_1, E_2$  – модуль пружності в головному напрямку.  $\nu_{12}, \nu_{21}$  – коефіцієнти Пуассона, які задовольняють  $\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2$ , а  $G_{12}$  – модуль зсуву.

Для двовимірного плоского напруженого стану було обрано критерій Хілла [3] для розрахунку ефективного напруження анізотропного матеріалу, яке визначається як:

$$\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{F\sigma_x^2 + G\sigma_y^2 + H\tau_{xy}^2 - 2N\sigma_x\sigma_y} \quad (3)$$

де  $F, G, H, N$  – параметри властивостей матеріалу, пов’язані з модулем пружності матеріалу, коефіцієнтом Пуассона:

$$F = \frac{1}{E_1}, \quad G = \frac{1}{E_2}, \quad H = \frac{1}{G_{12}}, \quad N = -\frac{\nu_{12}}{E_2} \quad (4)$$

**Чисельно-аналітичний метод** У скінченно-елементних розрахунках матриця жорсткості елементів визначається наступним рівнянням [5]:

$$\mathbf{K}_e = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (5)$$

де  $\mathbf{B}$  – матриця деформацій-переміщень, яка представляє зв’язок між переміщенням вузла та деформацією одиниці,  $\mathbf{D}$  – матриця пружності,  $A$  – площа одиниці, а матриця жорсткості, по суті, представляє “жорсткість” одиниці, яка використовується для перетворення вектора переміщення вузла у вектор сили вузла:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{U} \quad (6)$$

Деформації та напруження всередині елемента розраховуються за наступними рівняннями :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_e \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8)$$

Пошкодження ініціюється, коли ефективне напруження  $\varepsilon_i$  в одиниці конструкції перевищує відповідний поріг пошкодження. Після ініціювання пошкодження рівняння балансу для пошкодженого елемента у відповідній інкрементній формі має вигляд:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{C} d\mathbf{u} \quad (9)$$

де 1 – еквівалентний приріст вузлової сили елемента; 2 – приріст вузлового переміщення; 3 – матриця тангенціальної жорсткості елемента, 4 – змінні, позначені в системі координат, тобто вони відображають нерівномірність, спричинену матеріальними пошкодженнями. Рівняння рівноваги для інкрементної форми пошкодженої конструкції мають вигляд:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{C} d\mathbf{U} \quad (10)$$

Тут  $d\mathbf{F}, \mathbf{C}, d\mathbf{U}$  є голоморфними. У конкретній операції виконується крок обчислення для кожного додаткового зовнішнього навантаження  $d\mathbf{F}$  на конструкцію. Істинне поле переміщень, а також істинне поле деформацій після додаткового навантаження є відповідно:

$$\mathbf{U}_{t+1} = \mathbf{U}_t + d\mathbf{U}_{t+1} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_t + d\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \quad (12)$$

Цей розрахунок можна виконати крок за кроком і отримати зміни істинного поля деформацій. Після отримання розрахунку істинного поля деформації та його зміни можна розрахувати поле пошкодження суцільності та його зміну.

Конкретний процес показано на рис. 1 нижче. Спочатку виконується моделювання і створення сітки в Abaqus і генерується вхідний файл (.inp), потім імпортуються дані в Matlab, визначаються параметри матеріалу, розраховуються вузли і зберігаються дані про пошкодження. Потім оброблені дані експортуються та імпортуються в ParaView, де дані про

пошкодження обробляються, аналізуються та візуалізуються, утворюючи повний ланцюжок моделювання та аналізу від моделювання до постобробки[6].

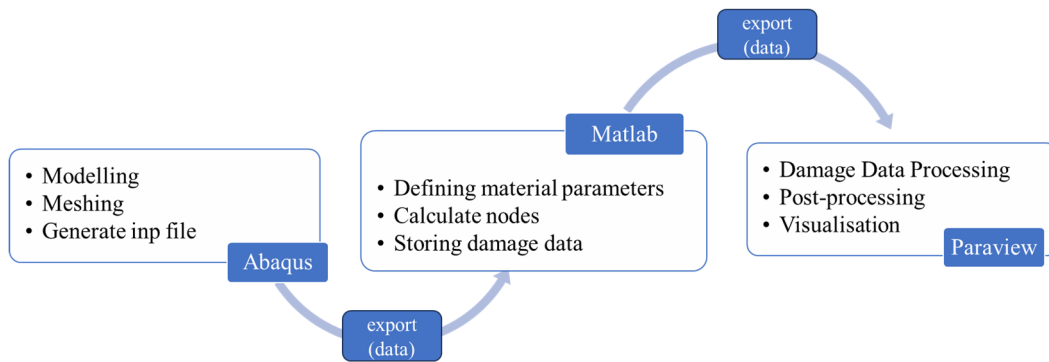


Рис. 1. Numerical Methods Process

В якості прикладу використовується композитна пластина з вуглецевого волокна/епоксидної смоли (50 мм × 50 мм) з центральним отвором (діаметром 2,5мм) (параметри матеріалу наведені в таблиці) для перевірки двовимірного ортогонального анізотропного процесу пошкодження матеріалу[4].

Таблиця 1

Параметри матеріалу

Константи пружності	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
	140.35	9.44	5.403	0.253

Для побудови сітки використовується тривузлова комірка (CPS3) з 2212 комірками, на правій границі ( $x = 50$  мм) прикладається розтягуюче напруження ( $\sigma_x = P$ ), що вказує на область, де прикладається навантаження; Ця гранична умова описує типовий одновісний розтяг, в якому ліва межа забезпечує фіксоване обмеження, в той час як права межа прикладає задане розтягуюче напруження для моделювання силового стану матеріалу в напрямку  $x$ [7].

**Результати** Результати показують(як показано на рис. 2), що зона пошкодження починається від краю отвору і поступово поширюється вглиб матеріалу. В межах зони пошкодження інтенсивність пошкодження поступово зростає в кожному місці, що відображається зростанням значення  $d$ . Рис. (a) ілюструє початковий розвиток пошкодження від краю отвору. На рис. (d) виділено лінію ізоповшкодження біля краю отвору. Ця трикутна межа добре узгоджується з експериментальними спостереженнями.

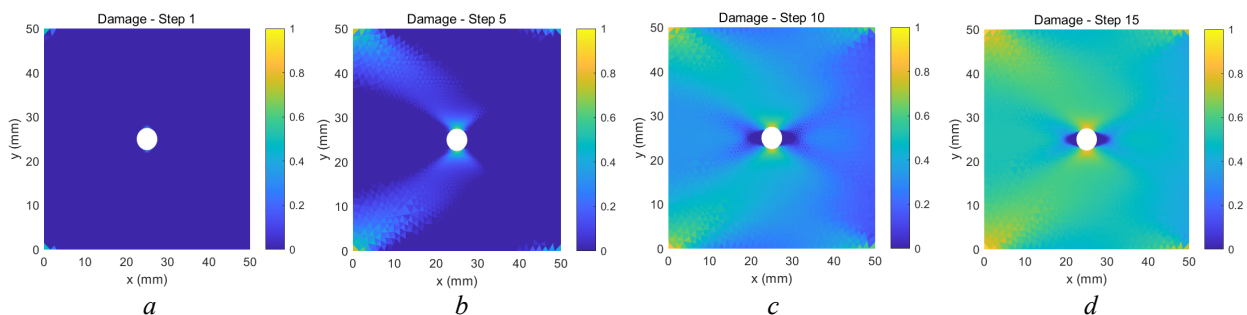


Рис. 2. Еволюція пошкоджень

## Висновки

1. Для двовимірних ортотропних анізотропних матеріалів (наприклад, композитних панелей з вуглецевого волокна та епоксидної смоли) при моделюванні необхідно враховувати анізотропні властивості матеріалу та його геометричні особливості (наприклад, центральні отвори). Метод скінченних елементів забезпечує точний розрахунок напружень і деформацій комірок з використанням матриці жорсткості, матриці деформацій-переміщень матриці пружності. Критерій пошкодження (наприклад, критерій Хілла) використовується для визначення початку пошкодження та опису еволюції пошкодження шляхом зміни жорсткості матеріалу.

2. Аналіз різних умов навантаження (наприклад, розтягнення в напрямку  $x$ ) залежить від встановлення обґрунтованих граничних умов і методів навантаження. Граничні умови повинні гарантувати, що загальний рух жорсткого тіла моделі обмежений, в той час як навантаження можна прикладати поступово, щоб зафіксувати весь процес розвитку матеріалу від пружності до пошкодження. Основні граничні умови включають фіксовані або симетричні межі, а форми навантаження включають рівномірні нормальні або зсувні сили.

3. Зміни в істинних полях переміщень і деформацій розраховуються за допомогою інкрементних ітерацій скінченних елементів, які поєднуються з критерієм пошкодження для визначення початку і поширення пошкодження (наприклад, руйнування при розтягуванні або зсуві через концентрацію напружень на краю отвору). Ці результати можуть виявити механічні властивості реакції матеріалів при різних навантаженнях і забезпечити теоретичну підтримку для проектування та оптимізації композитних матеріалів.

## Список літератури

1. Payan J. Damage modelling of laminated carbon/epoxy composites under static and fatigue loadings / J. Payan // International Journal of Fatigue. 2002. Vol. 24, No. 2–4. P. 299–306.
2. Bobyr M. Phenomenological damage models of anisotropic structural materials / M. Bobyr, O. Khalimon, O. Bondarets // Journal of Mechanical Engineering NTUU "Kyiv Polytechnic Institute". 2013. No. 67. P. 5–13.
3. Тао Х. Модель безперервного пошкодження ламінатів, армованих вуглецевим волокном (CFRP) під навантаженням на розтяг//Інновації молоді в машинобудуванні 2024.
4. Huang T. Prediction ability analysis of phenomenological strength criteria for composites / T. Huang // Journal of Engineering Sciences. 2024. Vol. 11, No. 1. P. D54–D65.
5. Barbero E. J. Finite element analysis of composite materials using abaqus® / E. J. Barbero. CRC press, 2023.
6. Voyiadjis G. Z. Mechanics of composite materials with matlab / G. Z. Voyiadjis, P. I. Kattan. Springer Science & Business Media, 2005.
7. Tao X. IN-PLANE SHEAR DAMAGE MODELLING OF T300/EPOXY COMPOSITES//Integration of Education, Science and Business in Modern Environment: Summer Debates: Proceedings of the 6th International Scientific and Practical Internet Conference, August 1-2, 2024. FOP Marenichenko VV, Dnipro, Ukraine, 343 p. 302.

## Numerical and analytical method of damage development in anisotropic plates

**Huang Tao**

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

**Abstract:** In this study, a numerical method is used to investigate the damage evolution of two-dimensional anisotropic plates under various loading conditions. The stress-strain behavior of anisotropic materials under plane stress conditions is described in conjunction with Hill's effective stress calculation criterion. Finite element analysis and incremental loading methods are used to determine the evolution of strain and damage fields. Numerical simulations were integrated with Abaqus for modelling, MATLAB for parameter definition and ParaView for visualisation. Validation under uniaxial tension conditions of CFRP plates with central holes showed that the damage starts from the edge of the holes and extends inwards, which is effectively illustrated by the iso-damage contours. These results provide a theoretical basis for optimising the design and safety assessment of anisotropic plates for engineering applications.

**Keywords:** anisotropic; composite materials; numerical analytical method; damage evolution.