

УДК 539.376

До задачі математичної обробки експериментальних даних в задачах повзучості

В.С. Ушакова¹, О.В. Ушаков²

1 – Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна;

2 – Інститут спеціальної техніки та судових експертиз СБУ, Київ, Україна

Анотація: В роботі наведено три методи обробки експериментальних даних на повзучість. Розглянуто метод апроксимації методом найменших квадратів де в якості апроксимуючої функції вибрано кубічний поліном. Також розглянуто метод апроксимації кубічними сплайнами і згладжуючими кубічними сплайнами, що містять вагові коефіцієнти. Наведено і експериментально апробовано метод математичної обробки експериментальних даних на кривих повзучості, що побудовані за умов розтягу і чистого кручення. В якості апроксимуючої функції обрано згладжуючі кубічні сплайни, як функції, що найкраще описують процеси повзучості. Розраховано коефіцієнти сплайн апроксимації при оптимальній кількості вузлів. Отримані коефіцієнти співставлені з експериментальними даними кривих повзучості за умов розтягу і чистого кручення при різних рівнях навантаження. Отримані дані апроксимації з високою точністю узгоджуються з експериментами.

Ключові слова: Сплайн апроксимація; згладжуючі кубічні сплайни, метод найменших квадратів; криві повзучості; математична обробка експериментальних даних; одновісний розтяг; чисте кручення.

Вступ. Задача знаходження функцій повзучості та визначення невідомих констант, що містяться в них є одним з найважливіших питань при побудові будь-якої теорії і є предметом багатьох досліджень [1], [2]. В лінійній і нелінійній теорії спадкової в'язкопружності матеріальні константи визначаються, як правило, за допомогою обробки експериментальних на повзучість зразків матеріалу за умов розтягу і чистого кручення. Точність визначення даних констант суттєво залежить від точності апроксимації первинних експериментальних даних, що задані дискретно. Існують різні методи апроксимації. Найпоширенішими є метод найменших квадратів, що наперед задає структуру апроксимуючої функції, застосування кубічних сплайнів та інші чисельні методи [3], [4].

Основні труднощі, що виникають при обробці експериментів на повзучість пов'язані з тим, що апроксимація кривих повинна мати високу точність як в області сингулярності так і для великих значень часу, окрім того, важливе значення має стадія кривої повзучості, оскільки може змінюватись характер опуклості залежно від стадії.

Виходячи з вище сказаного, метою роботи є аналіз існуючих методів апроксимації експериментальних даних, дослідження їх недоліків і переваг, а також розробка методики обробки експериментальних даних кривих повзучості за умов одновісного розтягу і чистого кручення з урахуванням всіх характерних стадій процесу. Значення коефіцієнтів, що отримані в наслідок апроксимації первинних даних згладжуючими кубічними сплайнами апробуються на дискретних значеннях первинних кривих повзучості, що побудовані за умов одновісного розтягу або чистого кручення.

1. Постановка задачі

Нехай існує деяка функціональна залежність:

$$\varepsilon^c = F(\varepsilon^c, \sigma, \theta, t, p_1, p_2, p_3 \dots), \quad (2.1)$$

що пов'язує деформацію повзучості ε^c , напруження σ , температуру θ і час t і визначається константами $p_1, p_2, p_3 \dots$, які необхідно визначити. Стандартний експеримент на повзучість передбачає фіксацію величин ε^c і t при сталих значеннях σ і θ . Результати випробувань

представляють у вигляді первинних кривих повзучості (рис. 1). Величина ε^0 відповідає значенню миттєвої деформації, що виникає після миттєвого прикладання навантаження ($\varepsilon^c = \varepsilon - \varepsilon^0$), а ε_R – деформації, що накопичені до моменту руйнування t_R . Значення параметрів $p_1, p_2, p_3 \dots$ повинно забезпечувати най-краще узгодження значень функції F і експериментальних даних.

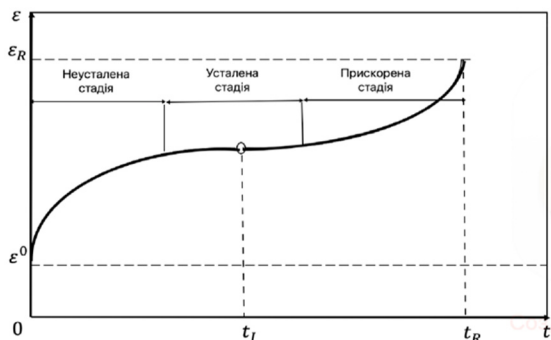


Рис. 1. Стадії кривої повзучості

При розв’язанні цієї задачі виникають труднощі, що пов’язані з проблемою точної апроксимації кривої повзучості на трьох стадіях, яким відповідають різні ділянки кривої (рис. 1). Для цих стадій характерними є ділянки кривої на яких із плином часу швидкість повзучості зменшується, залишається умовно незмінною і збільшується. На кривій повзучості існує точка перегину I і дві асимптоти, при яких швидкість повзучості прямує до нескінченності ($t = 0$ і $t = t_R$).

Слід зазначити, що характеристики повзучості реальних матеріалів мають статистичну природу і для експерименталь-

них даних характерним є їх розкид, причому відмінність в часі до руйнування може перевищувати цілий порядок. Окрім того, функція (2.1) повинна бути щонайменше двічі неперервно диференційованою.

Задача полягає в розробці і практичній апробації ефективної методики апроксимації дискретних експериментальних даних кривих повзучості за умов одновісного розтягу і чистого кручення з урахуванням всіх характерних стадій процесу, а також в практичній апробації даного чисельного методу на задачах повзучості [2].

2 Методи апроксимації експериментальних даних

2.1 Апроксимація експериментальних даних єдиною кривою за допомогою методу найменших квадратів.

Одним з найрозповсюдженіших методів апроксимації експериментальних даних є метод найменших квадратів, який ґрунтується на знаходженні мінімуму квадратичного відхилення експериментальних даних від розрахункових. Шукана функція повинна мати нескладну структуру і в той же час адекватно відображати залежність. Розглянемо метод більш детально. Нехай $y = f(x)$ – функція, що наближує експериментальні дані $A_1(x_1; y_1); A_2(x_2; y_2); \dots, A_n(x_n; y_n)$. Щоб оцінити точність наближення знайдемо $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ і різниці $e_1 = y_1 - f(x_1), e_2 = y_2 - f(x_2), \dots, e_n = y_n - f(x_n)$, між експериментальними і функціональними значеннями. Знайшовши суму квадратів різниць отримаємо вираз:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (2.1)$$

Функція $y = f(x)$ підбирається таким чином, щоб сума квадратів відхилень приймала найменше значення. В якості апроксимуючої функції можна обрати як елементарні функції, так і більш складні структури з деякою кількістю невідомих параметрів $f(x) = f(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$. Задача зводиться до знаходження мінімуму квадратичного відхилення (2.1). Оскільки функція

$y = f(x)$ містить певну кількість параметрів, то їх знаходження зводиться до розв'язання системи:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

В задачах повзучості здебільшого застосовують кубічні поліноми виду $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$. Для пошуку невідомих параметрів складемо функцію $f(a_1, a_2, a_3, a_4)$:

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 - a_2x_i - a_3x_i^2 - a_4x_i^3)^2 \rightarrow \min \quad (2.3)$$

Продиференціювавши $f(x)$ по a_1, a_2, a_3 і a_4 отримаємо систему чотирьох алгебраїчних рівнянь для обчислення параметрів a_1, a_2, a_3, a_4 :

$$\begin{cases} a_1n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_4 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_4 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_4 \sum_{i=1}^n x_i^5 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^5 + a_4 \sum_{i=1}^n x_i^6 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^3 \end{cases} \quad (2.4)$$

Розв'язавши систему (2.4) визначимо невідомі коефіцієнти a_1, a_2, a_3 і a_4 , що описують апроксимуючу функцію. Поліноми третього степеня з задовільною точністю описують процеси повзучості, але на певному проміжку. Для великих часів більш доцільно використовувати інші апроксимації.

2.2 Сплайн-апроксимація кривих повзучості. Кубічні сплайни є ефективним методом апроксимації експериментальних даних кривих повзучості за умов кручення. Особливістю даного методу є те, що крива повзучості апроксимується кубічною параболою на рівному відрізку. Апроксимація може містити таку кількість кривих, якої достатньо для ефективного наближення даних експериментальною кривою. Точки зміни однієї кривої іншою називають вузлами. Метод передбачає, що апроксимуюча функція повинна проходити через всі експериментальні точки. При великій кількості вузлів L апроксимуюча функція буде мати точки, де похідна змінює знак. В цьому випадку функція повзучості $\varepsilon^c(t)$, що апроксимує експериментальні дані має вигляд:

$$\varepsilon^c(t) = \varepsilon_i + \left[\frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2k_i + k_{i+1}) \right] (t - t_i) + \frac{k_i}{2} (t - t_i)^2 + \frac{k_{i+1} - k_i}{6h_i} (t - t_i)^3, \\ t \in [t_i; t_{i+1}], h_i = t_{i+1} - t_i, i = \overline{1, L-1}, \quad (2.5)$$

тут k_i – коефіцієнти сплайна, що визначаються з умови неперервності першої похідної в точках $t_i, (i = \overline{1, L-1})$ і деяких краєвих умов на кінцях відрізка, що задає апроксимуючу функцію $\widetilde{\varepsilon}^c(t)$; ε_i – табличні значення апроксимуючої функції в точках t_i .

Незважаючи на те, що кубічні сплайни задовільно описують процес повзучості, вони часто змінюють характер опуклості, щоб отримати найменшу похибку, через що вигляд функції не відповідає реальним процесам. В зв'язку з цим існує необхідність зменшити вплив експериментальних даних, що спотворюють загальну картину процесу.

2.3. Використання згладжуючих кубічних сплайнів при апроксимації кривих повзучості. Згладжуючі кубічні сплайни дозволяють ліквідувати той недолік, що пов'язаний з апроксимацією даних, які не відповідають реальним процесам. Методика побудови згладжуючих кубічних сплайнів ґрунтується на припущенні, що функція не обов'язково проходить через всі табличні точки. Вплив точок зменшується за рахунок введення вагових функцій $p_i \geq 0$.

Розглянемо кубічний сплайн виду:

$$J[\widetilde{\varepsilon}^c(t)] = \int_{t_1}^L \left| \widetilde{\varepsilon}^c(t) \right|^2 dt + \sum_{i=1}^L \frac{[\widetilde{\varepsilon}^c(t_i) - \varepsilon_i]^2}{p_i} \quad (2.6)$$

В формулі (2.6) передбачено, що чим менше значення p_i тим ближче $\widetilde{\varepsilon}^c(t_i)$ до табличних ε_i , а для $p_i = 0$ доданок матиме символічний характер, а $\widetilde{\varepsilon}^c(t_i) = \varepsilon_i$. Інакше кажучи, залежність між $\widetilde{\varepsilon}^c(t_i)$, ε_i і p_i може бути задана співвідношенням:

$$\widetilde{\varepsilon}^c(t_i) = \varepsilon_i - D_i p_i, \quad i = \overline{1, L-1}, \quad (2.7)$$

де

$$D_i = \begin{cases} \frac{\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1}{h_1} & i = 1; \\ \frac{\tilde{k}_{i+1} - \tilde{k}_i}{h_i} - \frac{\tilde{k}_i - \tilde{k}_{i-1}}{h_{i-1}}, & i = \overline{2, L-1}; \\ \frac{\tilde{k}_L - \tilde{k}_{L-1}}{h_{L-1}} & i = L. \end{cases} \quad (2.8)$$

Тут \tilde{k}_i – коефіцієнти згладжуючого сплайна $\widetilde{\varepsilon}^c(t)$.

Використовуючи умову неперервності похідної $\left[\widetilde{\varepsilon}^c(t) \right]'$ в точках t_i для визначення коефіцієнта $\tilde{k}_i, i = \overline{1, L-1}$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$k_{i-1} \frac{h_{i-1}}{6} + k_i \frac{h_{i-1} + h_i}{3} + k_{i+1} \frac{h_i}{6} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{i+1} - \tilde{\varepsilon}_i}{h_i} - \frac{\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{i-1}}{h_{i-1}} \quad (2.9)$$

що складається з $(L-2)$ рівнянь і містить L невідомих. Додавши відповідні краєві умови і врахувавши (2.7) та (2.8) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з двома рівняннями, яких бракувало в (2.8):

$$\frac{\tilde{k}_1}{h_1} - \tilde{k}_2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) + \frac{\tilde{k}_3}{h_2} = 0;$$

$$\frac{\tilde{k}_{L-2}}{h_{L-2}} - \tilde{k}_{L-1} \left(\frac{1}{h_{L-2}} + \frac{1}{h_{L-1}} \right) + \frac{\tilde{k}_L}{h_{L-1}} = 0.$$

Для зменшення впливу значень, що суттєво спотворюють загальну картину експерименту слід варіювати значення вагових коефіцієнтів p_i в кожній точці t_i . Також ненульові значення надавались тим вузлам, де відбувалась зміна знаку першої похідної сплайну. Процедура згладжування дозволяє виключити зайві точки перегину, а також експериментальні дані, які спотворюють загальну картину.

Список літератури

1. Голуб В.П., Плащинская А.В., Романов А.В. Щодо розв'язку задач розрахунку довговічності призматичних стержнів внаслідок втоми за умов одновісного асиметричного розтягу-стиску // Прикл. механіка, 2023. – Том 59 (69), №5. – С. 96-105.
2. Ушакова В.С., Ушаков О.В. Горун О.Ю., Застосування згладжуючих кубічних сплайнів у моделюванні процесів повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану // Вісник київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки. Київ– 2023. №3. С. 156-159.

To the problem of mathematical processing of experimental data in creep problems

V. Ushakova¹, O. Ushakov²

1 – Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

2 – Institute of Special Equipment and Forensic Expertise of the Security Service of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Abstract: The paper presents three methods of processing experimental data on creep. The least squares approximation method is considered, where a cubic polynomial is chosen as the approximating function. The method of approximation by cubic splines and smoothing cubic splines containing weighting coefficients is also considered. The method of mathematical processing of experimental data on creep curves constructed under the conditions of tension and pure torsion is given and experimentally tested. As an approximating function, smoothing cubic splines were chosen as the functions that best describe creep processes. Spline approximation coefficients with the optimal number of nodes are calculated. The obtained coefficients are compared with the experimental data of the creep curves under the conditions of tension and pure torsion at different load levels. The obtained approximation data agree with experiments with high accuracy.

Keywords: Spline approximation; smoothing cubic splines, least squares method; creep curves; mathematical processing of experimental data; uniaxial tension; pure torsion.