УДК 539.3

Хвилі кручення в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів

А.Ю. Глухов
Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАНУ, Київ, Україна

Анотація. *В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод розв'язку задач про поширення хвиль кручення в шаруватих композитних заздалегідь напружених матеріалах при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення хвиль вздовж шарів. Отримані дисперсійні рівняння для симетричних і антисиметричних хвиль та їх довгохвильові наближення.*
Ключові слова: *шаруватий композитний матеріал, початкові напруження, пружні хвилі, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.*

В даній роботі досліджуються закономірності поширення пружних хвиль кручення в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.

Розглядається шаруватий композитний матеріал з початковими напруженнями, який складається з шарів двох типів, що чергуються, в кожному з яких матеріали і початкові напружено-деформовані стани є однаковими для розглянутого типу шарів.

При дослідженні будемо застосовувати лагранжеві координати $y_n \equiv y^n$, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з декартовими координатами, і лагранжеві координати r', θ, y_3, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з круговими циліндричними координатами.

Декартову систему координат $\left(y_1, y_2, y_3\right)$ в початковому напружено-деформованому стані вибираємо таким чином, щоб вісь була спрямована по нормалі до площин розділу шарів.

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів; у разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів будемо вважати, що вісь ізотропії спрямована уздовж осі Oy_3.

Під хвилями кручення будемо розуміти нормальні хвилі, що поширюються в радіальному напрямку і відповідають крутильним коливанням нескінченного шару.

Вважаємо початковий напружений стан однорідним

$$u_m^0 = \left(\lambda_m - 1\right) x_m; \quad \lambda_m = const . \tag{1}$$

Також приймаємо, що для кожного з шарів реалізується вісесиметричний напружено-деформований стан

$$\begin{gathered} S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)}; \\ \varepsilon_{11}^{0(j)} = \varepsilon_{22}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{2}$$

При вище вказаних умовах будемо досліджувати переміщення, що відповідають умовам [1], [2]:

$$u_{r'}^{(j)} \equiv 0; \quad u_\theta^{(j)} = u_\theta^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right); \quad u_3^{(j)} \equiv 0; \quad u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} \equiv 0. \tag{3}$$

Остання тотожність в (3) справедлива для нестисливого матеріалу.

У цьому випадку в поданні спільних розв'язків просторових динамічних лінеаризованих задач теорії пружності стосовно до загального розв'язку задачі в циліндричних координатах можна прийняти

$$\Psi'^{(j)} = \Psi'^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right); \quad \mathrm{X}'^{(j)} \equiv 0. \tag{4}$$

У розглянутому випадку для визначення переміщень $u_\theta^{(j)}$ в кожному з шарів маємо наступні співвідношення [1], [2]:

$$u_\theta^{(j)} = -\frac{\partial}{\partial r'}\Psi'^{(j)}. \tag{5}$$

Для складових тензора напружень $Q'^{(j)}$ при $y_3 = const$ отримуємо вирази:
для стисливих тіл

$$Q'^{(j)}_{3\theta} = \omega'^{(j)}_{3113}\frac{\partial}{\partial y_3}u_\theta^{(j)}; \tag{6}$$

для нестисливих тіл

$$Q'^{(j)}_{3\theta} = \varkappa'^{(j)}_{3113}\frac{\partial}{\partial y_3}u_\theta^{(j)}. \tag{7}$$

В співвідношеннях (5) функції $\Psi'^{(j)}$ визначаються із рівнянь:
у випадку стисливих тіл

$$\left(\Delta' + \omega'^{(j)}_{3113}\omega'^{(j)-1}_{1221}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)}\omega'^{(j)-1}_{1221}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\Psi'^{(j)} = 0; \tag{8}$$

у випадку нестисливих тіл

$$\left(\Delta' + \varkappa'^{(j)}_{3113}\varkappa'^{(j)-1}_{1221}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)}\varkappa'^{(j)-1}_{1221}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\Psi'^{(j)} = 0. \tag{9}$$

Тут $\Delta_1' = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}$; $\varrho'^{(j)}$ – щільність матеріалів кожного з шарів в попередньо напруженому стані; τ – час. Складові тензорів $\omega'^{(j)}$, $\varkappa'^{(j)}$ визначаються для конкретних постановок задач [1], [2].

Таким чином, відповідно до вище викладеного дослідження закономірностей поширення хвиль кручення у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння (8) для нестисливих матеріалів і рівнянь (9) для нестисливих матеріалів при виконанні умов неперервності в площинах розділу шарів і умов періодичності, відповідно теорії Флоке.

Розглянемо поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів. У цьому випадку за аналогією з [3], [5] для визначення "істинної" фазової швидкості поширення хвиль кручення у шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями приймемо

$$\Psi'^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right) = \Psi'^{(j)(0)}\left(y_3\right)H_0^{(1)}\left(r'k\right)e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j = 1, 2. \tag{10}$$

В (10) k і ω – хвильове число і кругова частота; C – "істина" фазова швидкість хвиль кручення; $H_0^{(1)}\left(x\right)$ – функція Ханкеля нульового порядку першого роду, що забезпечує поширення хвиль кручення, що йдуть "на нескінченність"; $\Psi'^{(j)(0)}\left(y_3\right)$ – амплітудна функція. Надалі індексами (0) відзначені всі амплітудні величини при представленнях типу (10).

Підставляючи (10) в (5), для визначення переміщень отримуємо наступні вирази:

$$u_{\theta}^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right) = u_{\theta}^{(j)(0)}\left(y_3\right)\frac{\partial}{\partial r'}H_0^{(1)}\left(r'k\right)e^{-i\omega\tau};$$
$$u_{\theta}^{(j)(0)}\left(y_3\right) = -\Psi'^{(j)(0)}\left(y_3\right). \quad (11)$$

Аналогічно, підставляючи (10) в (6) і (7), для визначення складових тензора напружень $\tilde{Q}'^{(j)}$ при $y_3 = const$ отримуємо:

$$Q_{3\theta}'^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right) = Q_{3\theta}'^{(j)(0)}\left(y_3\right)\frac{\partial}{\partial r'}H_0^{(1)}\left(r'k\right)e^{-i\omega\tau}; \quad (12)$$

У випадку стисливих тіл в виразах (10)

$$Q_{3\theta}'^{(j)(0)}\left(y_3\right) = -\omega_{3113}'^{(j)}\frac{\partial}{\partial y_3}\Psi'^{(j)(0)}\left(y_3\right), \quad (13)$$

а для нестисливих тіл

$$Q_{3\theta}'^{(j)(0)}\left(y_3\right) = -\varkappa_{3113}'^{(j)}\frac{\partial}{\partial y_3}\Psi'^{(j)(0)}\left(y_3\right). \quad (14)$$

Підставлючи (10) в рівняння (8) і (9), отримаємо рівняння для визначення функцій $\Psi'^{(j)(0)}$ в наступному вигляді:

стисливі тіла

$$\left(\omega_{3113}'^{(j)}\omega_{1221}'^{(j)-1}\frac{d^2}{dy_3^2} + \varrho'^{(j)}\omega^2\omega_{1221}'^{(j)-1} - k^2\right)\Psi'^{(j)(0)}\left(y_3\right) = 0; \quad (15)$$

нестисливі тілі

$$\left(\varkappa_{3113}'^{(j)}\varkappa_{1221}'^{(j)-1}\frac{d^2}{dy_3^2} + \varrho'^{(j)}\omega^2\varkappa_{1221}'^{(j)-1} - k^2\right)\Psi'^{(j)} = 0. \quad (16)$$

Оскільки в (11)–(16) всі співвідношення представлені через амплітудні величини, то умови на границі контакту шарів і умови періодичності також запишемо для амплітудних величин. Для цього виділимо два сусідні шари і будемо вважати, що шар, величини якого відмічені індексом 1, займає по вісі Oy_3 область $0 \le y_3 \le h'^{(1)}$ і шар, всі величини якого відмічені індексом 2, займає по вісі Oy_3 область $-h'^{(2)} \le y_3 \le 0$.

За умови проковзування при $y_3 = 0$ повинні виконуватися умови неперервності:

$$Q_{3\theta}'^{(1)(0)}\left(0\right) = 0; \quad Q_{3\theta}^{(2)(0)}\left(0\right) = 0; \quad (17)$$

і умови періодичності:

$$Q_{3\theta}'^{(1)(0)}\left(h^{(1)}\right) = 0; \quad Q_{3\theta}^{(2)(0)}\left(-h^{(2)}\right) = 0. \quad (18)$$

Таким чином, для стисливого тіла необхідно знайти розв’язок звичайного диференціального рівняння (15), що задовольнить умовам (17) і (18) за умови проковзування з урахуванням позначень (11) і (13). Для нестисливого тіла шукаємо розв’язок звичайного диференціального рівняння (16), що задовольнить умовам (17) і (18) з урахуванням позначень (11) і (14).

Розглянуто поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів. Задача зводиться до побудови розв’язків рівняння відносно амплітудної функції при виконанні умов неперервності в площинах розділу шарів і умов періодичності, відповідно теорії Флоке. Для симетричних і антисиметричних хвиль кручення отримані дисперсійні рівняння та їх довгохвильові наближення.

Між шарами композитного матеріалу у випадку проковзування не відбувається взаємодії. Швидкості розповсюдження хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень. При довгохвильовому наближенні швидкості поширення симетричних і антисиметричних хвиль кручення для кожного з шарів рівні швидкостям поширення поперечних хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

Список літератури

1. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2016. 501 с.
2. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частично ограниченных телах. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2016. 505 с.

Torsion waves in layered composite materials with initial stresses at the slip of layers

A. Glukhov
Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Abstract. *Within the framework of the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, the formulation and method of solving problems on the propagation of torsional waves in layered composite pre-stressed materials during sliding of layers are considered. The case of wave propagation along layers is investigated. Dispersion equations for symmetric and antisymmetric waves and their long-wave approximations are obtained.*
Keywords: *layered composite material, initial stresses, elastic waves, dispersion equation, long-wave approximation.*