

УДК 539.376

Моделювання релаксації напружень за умов одноступеневого деформування нелінійно-в'язкопружних матеріалів за допомогою функції Хевісайда

Я.В. Павлюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ, Україна

Анотація. Розглядається задача розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одноступеневого деформування. Програма навантаження реалізується за допомогою одичної функції Хевісайда. Для опису процесу деформування використовується нелінійна модель повзучості з незалежною в часі нелінійністю типу моделі Работнова. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність; нелінійна релаксація; дробово-експоненційне ядро спадковості; нелінійно-в'язкопружні матеріали; одноступеневе деформування.

Вступ. В процесі експлуатації в'язкопружні матеріали у відповідальних елементах багатьох сучасних конструкцій деформуються і руйнуються в нелінійній області при нестационарних режимах навантаження [1]–[3]. Особливо актуальними є задачі релаксації напружень, що викликає перерозподілення напружень в елементах конструкцій в часі і порушення функціональних можливостей конструкції в цілому.

Актуальними лишаються питання вибору та обґрунтування структури нелінійної моделі, вибору структури ядра спадковості та практичної реалізації методики визначення параметрів ядра, а також питання їх експериментальної апробації. Фактично нерозв'язаними залишаються задачі розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестационарного деформування.

1. Постановка задачі. Визначальні рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності з незалежною від часу нелінійністю задаються співвідношеннями [1]:

$$\begin{aligned} \phi_0(\varepsilon(t)) &= \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau; \\ \sigma(t) &= \phi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau) \phi_0(\varepsilon(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(\tau)$ – повна деформація, що містить пружну компоненту ε^e і компоненту повзучості ε^c в моменти часу t і τ ; $\phi_0(\cdot)$ – функція, що задає діаграму миттєвого деформування і визначається експериментально; λ – реологічний параметр ($\lambda > 0$); $K(t-\tau)$, $R(t-\tau)$ – ядра повзучості і релаксації відповідно.

Нелінійність процесів повзучості, що задає рівняння (1.1) визначається видом функції $\phi_0(\cdot)$, яка в роботі задається за допомогою згладжуючих кубічних сплайнів виду

$$\phi_0(\varepsilon_e) = a_{0,j} + a_{1,j} \varepsilon_e + a_{2,j} \varepsilon_e^2 + a_{3,j} \varepsilon_e^3, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

де $a_{0,j}, a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що мають розмірність напруження і залежать від інтервалу розподілу осі деформацій.

Ядра спадковості $K(t-\tau)$ та $R(t-\tau)$ задаються дробово-експоненційними функціями:

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}; \quad (1.3)$$

а

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.4)$$

де α, β – параметри ядер, що підлягають визначенню з експерименту, $-1 < \alpha < 0, \beta > 0$.

Із Використанням процедури обернення функцій визначальні рівняння (1.1) записуються так:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \psi_0 \left[\sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \\ \sigma(t) &= \phi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau) \phi_0(\varepsilon(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (1.5)$$

тут $\psi_0(\cdot) = \phi_0^{-1}(\cdot)$ – обернення функції $\phi_0(\cdot)$, яке задається співвідношенням

$$\phi_0(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

тут $b_{0,j}, b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що апроксимують обернену функцію $\phi_0^{-1}(\cdot)$.

Довільний закон зміни напружень σ_t і деформацій ε_t в момент навантаження τ задається у вигляді суми множин різних значень сталих напружень σ_k і деформацій ε_k :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \sigma_k; \\ \varepsilon(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (1.7)$$

де $h(\cdot)$ – одинична функція Хевісайда, що має розрив першого роду за умови $t = \tau$; t – момент спостереження ($t \geq \tau$).

Умова нестационарного деформування (1.7) записується у вигляді

$$\varepsilon(t) = h(t-t_1) \varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{m-1} h(t-t_{k+1}) \Delta \varepsilon_k, \quad (1.8)$$

де ε_1 – початкове значення деформації на момент часу t_1 ; $\Delta \varepsilon_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}$ – приріст деформації в момент часу t_k .

У рамках рівнянь (1.5) розв'язується задача із розрахунку релаксації напружень за умов одноступеневого деформування плексигласу. Результати розрахунків зіставляються з експериментальними даними [3].

Задача включає експериментальне обґрунтування гіпотези подібності для досліджених матеріалів, визначення параметрів, що входять до визначальних рівнянь, та експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку релаксації напружень за умов стаціонарного та одноступеневого деформування.

2. Обґрунтування існування єдиної ізохронної діаграми деформування. Визначальні рівняння моделі в'язкопружності побудовано за умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування, що відображає подібність ізохронних діаграм повзучості і діаграми миттєвого деформування.

Результати експериментального обґрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування для плексигласу наведено в [3].

3. Визначення параметрів моделі. Значення параметрів ядер спадковості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер повзучості дробово-експоненційною функцією (1.3) за методикою викладеною в [1]. Значення параметрів ядра α, β, λ для плексигласу такі: $\alpha = -0,601$; $\beta = 0,4673 \text{ год}^{-(1+\alpha)}$; $\lambda = 0,441 \text{ год}^{-(1+\alpha)}$. Порівняння розрахункових даних з експериментальними свідчить про їх задовільне узгодження.

Значення коефіцієнтів сплайн апроксимації (1.6), які задають зворотню діаграму миттєвого деформування $\phi_0(\cdot)$ у рівнянні (1.5), для плексигласу такі: $b_3 = 2,3432728 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3}$; $b_2 = -2,9031164 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-2}$; $b_1 = 4,2250456796 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}$; $b_0 = 0$.

4. Повзучість за умов стаціонарного навантаження. Найпростіша перевірка застосування дробно-експоненційного ядра (1.3) і параметрів ядра, знайдених за єдиною функцією повзучості для вирішення задач нелінійної теорії в'язкопружності може бути здійснена на прикладі розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях. Умова навантаження (1.7) постійним у часі напруженнями при варіюванні величини напруження σ_k задається співвідношенням

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k; \quad k = \overline{1, m}. \quad (4.1)$$

Визначальне рівняння повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умови постійних напружень, на основі з (1.5) з урахуванням (4.1) та (1.6), записується у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & b_{0,j} + b_{1,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + b_{2,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right)^2 + \\ & + b_{3,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right)^3, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

В режимі стаціонарного навантаження (4.1) на підставі рівняння (4.2), розраховано та експериментально апробовано деформації повзучості плексигласу для декількох рівнів постійних напружень $\sigma_k = 13,7$ (○), $19,6$ (◐), $25,5$ (●) МПа. Результати розрахунків наведені на рис. 1 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками. В цілому, як видно з рис. 1, дробово-експоненційне ядро (1.2) і параметри ядра, забезпечують задовільне узгодження результатів розрахунку деформацій повзучості з експериментальними даними.

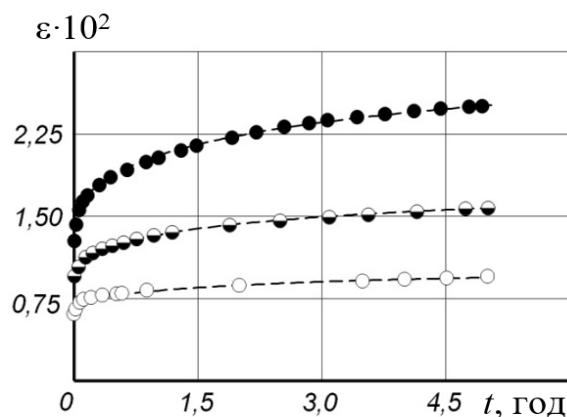


Рис. 1. Криві повзучості плексигласу

5. Розрахунок релаксації напружень за умов одноступеневого деформування. Умова навантаження (1.7) для режиму одноступеневого деформування, що задається програмою навантаження наведеною на рис. 2 а, б конкретизується у вигляді:

Умова навантаження (1.8) для режиму однократного ступеневого деформування $m=2$ конкретизується у вигляді

$$\varepsilon(t) = h(t - t_1)\varepsilon_1 + h(t - t_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (5.1)$$

де ε_1 – початкові деформації, прикладені в момент часу $\tau = 0$; ε_2 – деформація прикладена в момент часу $\tau = t_1$.

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умови одноступеневого деформування на основі (1.5) з урахуванням (5.1), записується так:

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^3 a_{i,j} (\varepsilon(t))^i - \lambda \left[(\varepsilon_1)^i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_2)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + (\varepsilon_2)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_2)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right] \quad (5.2)$$

Висновки

Результати розрахунків на рис.2 в, з свідчать, що структура запропонованої моделі дозволяє якісно описати процеси нестационарної релаксації. Варто відмітити, що розрахунки проводились із використанням параметрів, отриманих із базового експерименту на повзучість. На рис. 2, з здійснено перевірку принципу суперпозиції для нелінійних матеріалів (штрих-

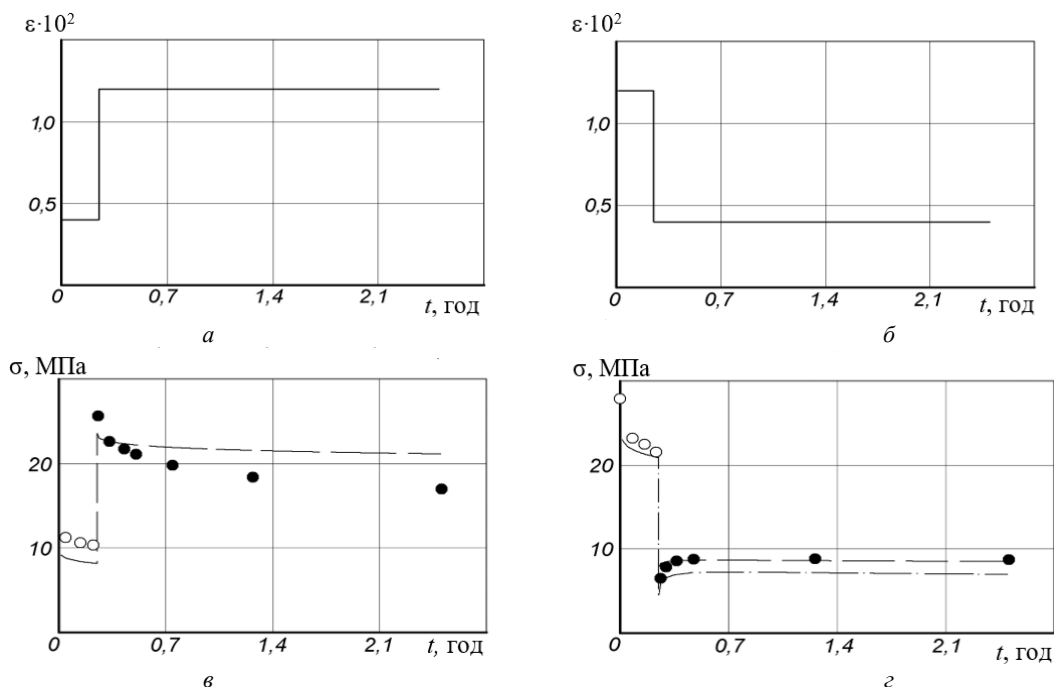


Рис. 2. Програма навантаження (а, б) та розрахунків (лінії) і експериментальні (точки) значення деформацій повзучості (в, з) за умов одноступеневого довантаження (а, в) та часткового розвантаження значення кривих релаксації плексигласу (в, з): в - $\varepsilon_k = 0,004$ (○),

0,012 (●); з - $\varepsilon_k = 0,012$ (○), 0,004 (●)

пунктирні лінії). Як видно із співставлення розрахункових даних (штрих-пунктирні лінії) із експериментальними принцип суперпозиції не працює для нелінійних матеріалів.

Список літератури

1. V.P. Golub, Y.V. Pavlyuk, and P.V. Fernati, "Determining Parameters of Fractional–Exponential Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials," *Int Appl Mech*, vol. 53, pp. 419–433, 2017.
2. B.P. Maslov, "Nonlinear Hereditary Creep of Isotropic Composites of Random Structure," *Int Appl Mech*, vol. 58, pp. 75–90, 2022.
3. Y.V. Pavlyuk, "Modeling of the Stress Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials Under Unsteady Deformation Conditions," *Strength Mater*, vol. 49, pp. 652–659, 2017.

Modelling of stress relaxation under one-step deformation of nonlinear viscoelastic materials using the Heaviside function

Y. Pavlyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences, Kyiv, Ukraine

Abstract. *The problem of calculating the stress relaxation of nonlinear viscoelastic materials under one-step deformation is considered. The loading program is implemented using the unit Heaviside function. To describe the deformation process, a nonlinear creep model with time-independent nonlinearity of the Rabotnov model type is used. The heredity kernels are defined by the fractional exponential Rabotnov function.*

Key words: *nonlinear viscoelastic; nonlinear creep; nonlinear relaxation; exponential-fractional hereditary kernel; nonlinear viscoelastic materials; single-stage deformation.*