

УДК 539.376

## Визначення релаксації напружень в тонкостінних трубчастих елементах із нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов розтягу та кручення

Павлюк Я.В.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, м. Київ, Україна

*Анотація.* Розв'язується задача із розрахунку релаксації напружень у тонкостінних трубчастих елементах із нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов двовісного напруженого стану. Сформульовано залежності між ядрами повзучості, що задають зсувні та об'ємні в'язкопружні властивості ізотропного нелінійно-в'язкопружного середовища за умов складного напруженого стану та ядрами повздовжньої та зсувної повзучості, що побудовані для одновісного розтягу та чистого скручення. Визначальні рівняння в'язкопружності для складного напруженого стану обрано у вигляді суперпозиції рівняння для зсувів та рівняння об'ємного деформування. Нелінійність в'язкопружних властивостей матеріалів задається залежностями між інваріантами тензорів деформацій та напружень у формі рівнянь типу моделі Работнова. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку релаксації нормальних та дотичних напружень у тонкостінних трубчастих елементах із поліетилену високої щільності ПЕВП.

*Ключові слова:* релаксація; нелінійно-в'язкопружність; ядро спадковості; складний напружений стан

**Вступ.** В процесі експлуатації в'язкопружні матеріали у відповідальних елементах багатьох сучасних конструкцій деформуються і руйнуються в нелінійній області при складному напруженому стані і складних режимах навантаження. Особливо актуальними є задачі релаксації напружень, що викликає перерозподілення напружень в елементах конструкцій в часі і порушення функціональних можливостей конструкції в цілому.

У спадкових теоріях в'язкопружності механічні властивості середовища задаються пружними сталими і ядрами спадковості, що включають ядра повзучості і ядра релаксації. Ідентифікація ядер спадковості і визначення параметрів ядер при складному напруженому стані є складною і зводиться, як правило, до встановлення залежності між ядрами спадковості при складному і одновісному напруженому стані.

В роботі розробляється метод визначення релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов двовісного напруженого стану, що передбачає встановлення залежностей компонентів тензорів деформацій від компонентів тензорів напружень і часом, а також розробку методів визначення функцій і параметрів що входять до цих залежностей на основі обробки експериментальних даних базових експериментів.

**1. Постановка задачі.** Розглядаються процеси повзучості і релаксації напружень ізотропних, однорідних, нестаріючих нелінійно-в'язкопружних матеріалів при складному напруженому стані. Визначальні рівняння повзучості, що задають залежність між компонентами тензора деформацій  $\varepsilon_{ij}$ , тензора напружень  $\sigma_{ij}$  і часом  $t$  при постійній температурі записуються у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)); \quad (i, j = \overline{1,3}); \\ \phi_i(\varepsilon_i(t)) = \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \phi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

розв'язком яких є рівняння релаксації

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i(t); t)}{\varepsilon_i(t)} \cdot \left( \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \right); & (i, j = \overline{1, 3}); \\ \sigma_i(t) = \phi_i(\varepsilon_i(t)) - \lambda_i \int_0^t R_i(t-\tau) \phi_i(\varepsilon_i(\tau)) d\tau; \\ \sigma_0(t) = \phi_v(\varepsilon_v(t)) - \lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau) \phi_v(\varepsilon_v(\tau)) d\tau. \end{cases} \quad (1.2)$$

Тут  $\varepsilon_v(\cdot)$  і  $\varepsilon_i(\cdot)$  – об’ємна деформація і інтенсивність тензора деформацій  $\varepsilon_{ij}(t)$ ;  $\sigma_0(t)$  – середнє напруження,  $\sigma_i(t)$  – інтенсивність напружень;  $\phi_i(\varepsilon_i(t))$ ,  $\phi_v(\varepsilon_v(t))$  – функції, що задають нелінійність скалярних властивостей і їх обернення  $\psi_i(\cdot)$  і  $\psi_v(\cdot)$  відповідно;  $K_i(t-\tau)$ ,  $K_v(t-\tau)$  і  $R_i(t-\tau)$ ,  $R_v(t-\tau)$  – ядра нелінійної повзучості і релаксації відповідно;  $\lambda_i$ ,  $\lambda_v$  – реологічні параметри;  $\delta_{ij}$  – дельта-функція Кронекера.

Ядра повзучості  $K_i(t-\tau)$  і  $K_v(t-\tau)$  в (1) і релаксації  $R_i(t-\tau)$  і  $R_v(t-\tau)$  в (1.2) задаються відповідно співвідношеннями

$$\begin{aligned} K(t-\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}; \\ R(t-\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де  $\alpha, \beta, \lambda$  – параметри ядер, що визначаються експериментально;  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функція Ейлера. Між ядрами повзучості і релаксації існує інтегральний зв’язок:

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t-\tau) R(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

Ідентифікація ядер релаксації в (1.2) здійснюється на основі групи базових дослідів на повзучість при постійних напруженнях. Група базових експериментів включає випробування на повзучість суцільних циліндричних зразків при одновісному розтягу із заміром поздовжніх і поперечних деформацій.

Для завдання табличних експериментальних даних в аналітичному вигляді використовуються згладжуючі кубічні сплайни [1].

Задача полягає у встановленні залежності між ядрами повзучості нелінійно-в’язкопружних матеріалів при складному і одновісному напруженні станах, у визначенні параметрів ядер релаксації і в експериментальній апробації сформульованих співвідношень на задачах релаксації напружень у тонкостінних трубчастих елементах із полімерних матеріалів при комбінованому навантаженні розтягом і крученням.

## 2. Ідентифікація ядер спадковості при складному напруженому стані

Для встановлення залежності між ядрами повзучості  $K_i(\cdot)$ ,  $K_v(\cdot)$  і ядрами повзучості,  $K_{11}(\cdot)$ ,  $K_{22}(\cdot)$  розв’яжемо рівняння (1.1) відносно  $\varepsilon_i(t)$ ,  $\varepsilon_v(t)$  і відповідно відносно  $\varepsilon_{11}(t)$ ,  $\varepsilon_{22}(t)$ . Скориставшись далі модифікованим принципом суперпозиції за умови, що величини  $\sigma_i(t) = const$  і  $\sigma_0(t) = const$   $K_i(t)$ ,  $K_v(t)$ ,  $K_{11}(t)$ ,  $K_{22}(t)$ .

Розв'язок системи рівнянь дозволяє встановити залежність між ядрами повзучості  $K_i(t)$ ,  $K_v(t)$  в (1.1) і  $K_{11}(t)$ ,  $K_{22}(t)$  у вигляді

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{2 \Psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) + \Psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{3 \Psi_i(\sigma_{11})} \quad (2.1)$$

і відповідно у вигляді

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\Psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) - 2 \Psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\Psi_v \left( \frac{1}{3} \sigma_{11} \right)}. \quad (2.2)$$

Котрі дозволяють розраховувати дискретні значення скалярних ядер повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів при складному напруженому стані, використовуючи значення ядер поздовжньої і поперечної повзучості при одновісному розтягу.

**3. Ідентифікація параметрів ядер повзучості.** Параметри ядер інтенсивності деформацій повзучості  $K_i(t-\tau)$  і  $K_v(t-\tau)$  об'ємної повзучості в (1.1) визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер, розрахованих за співвідношеннями (2.1) і (2.2) дробово-експоненційними функціями (1.3). Методика визначення параметрів ядер  $K_{11}(t-\tau)$  і  $K_{22}(t-\tau)$  нелінійно-в'язкопружних матеріалів викладена в [1]. Параметри ядер визначаються виходячи із умови подібності миттєвих діаграм деформування і ізохронних діаграм повзучості. В таблиці 1 наведені значення параметрів ядер спадковості поліетилену ПЕВП. Експериментальні дані запозичені із літератури [2].

Таблиця 1

Значення параметрів ядер спадковості для ПЕВП

$K_{11}(t)$ , год <sup>-1</sup>			$K_{22}(t)$ , год <sup>-1</sup>			$K_i(t)$ , год <sup>-1</sup>			$K_v(t)$ , год <sup>-1</sup>		
$\alpha_{11}$	$\beta_{11}$	$\lambda_{11}$	$\alpha_{22}$	$\beta_{22}$	$\lambda_{22}$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\lambda_i$	$\alpha_v$	$\beta_v$	$\lambda_v$
-0,1681	5,4039	4,5723	-0,2720	3,9906	3,6874	-0,1988	4,9293	4,2870	-0,0574	8,3649	8,0242

**4. Розрахунок релаксації нормальних напружень.** Розраховується зменшення у часі розтягуючих напружень  $\sigma_{11}(t)$  в тонкостінних трубчастих елементах із поліетилену ПЕВП при одновісному деформуванні видовженнями  $\varepsilon_{11} = const$  ( $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 0$ ) і комбінованому деформуванні видовженнями  $\varepsilon_{11} = const$  і зсувами  $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = const$ .

Для розрахунку релаксації нормальних напружень  $\sigma_{11}(t)$  із системи рівнянь (1.2) і (1.3) при  $\varepsilon_{11} = const$  і  $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 0$  отримуємо рівняння

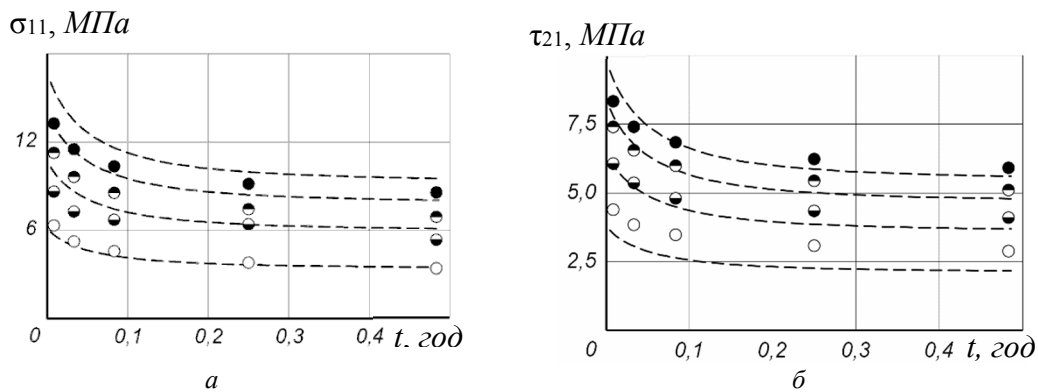
$$\sigma_{11}(t) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^3 f_{k,j} \left[ \frac{2(1+\nu)}{3} \varepsilon_{11} \right]^k \cdot \left[ 1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] + \sum_{m=0}^3 k_{m,j} [(1-2\nu)\varepsilon_{11}]^m \cdot \left[ 1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right], \quad (4.1)$$

а для розрахунку зміни дотичних напружень  $\tau_{21}(t)$  при  $\varepsilon_{21} = const$ ,  $\varepsilon_{11} = 0$ ,  $\varepsilon_i = const$ ,  $\varepsilon_v = const$  – рівняння

$$\tau_{21}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{m=0}^3 f_{m,j} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{21} \right]^m \cdot \left[ 1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right]. \quad (4.2)$$

Де  $f_{k,j}$  і  $k_{m,j}$  – коефіцієнти згладжуючих кубічних сплайнів функцій  $\phi_i(\cdot)$  і  $\phi_v(\cdot)$ , що мають розмірність напружень і залежать від  $j$ -го інтервалу розбиття.

Результати розрахунку релаксації нормальних напружень  $\sigma_{11}(t)$  та дотичних напружень  $\tau_{21}(t)$  в тонкостінних трубчастих елементах із поліетилену високої щільності ПЭВП при деформуванні постійними видовженнями і постійними зсувами, виконаних по рівняннях (4.1) і (4.2) із використанням приведених у таблиці 1 значень матеріальних констант, співставленні на мал.1 із експериментальними даними при одновісному розтягу (а) і комбінованому навантаженні



Мал. 1 Релаксація нормальних і дотичних напружень

крученням (б). При одновісному розтягу фіксувалось значення видовжень  $\varepsilon_{11} = 1,0$  ( $\circ$ );  $2,0$  ( $\ominus$ );  $3,0$  ( $\bullet$ );  $4,0$  ( $\bullet$ )% і зсувів  $\varepsilon_{21} : 0,87$  ( $\circ$ );  $1,73$  ( $\ominus$ );  $2,60$  ( $\bullet$ );  $3,4$  ( $\bullet$ )%. Як видно із мал. 1 отримано задовільне узгодження результатів розрахунку із експериментами.

## Determination of stress relaxation in thin-walled tubular elements made of nonlinear-viscoelastic materials under tension and torsion

Pavlyuk Y.V.

*The problem of the stress relaxation of isotropic nonlinear viscoelastic materials of a biaxial stress state is solved. The relationship between the heredity kernels of isotropic nonlinear viscoelastic materials under the complex and one-dimensional stress states is determined. The constitutive equations are chosen according to hypothesis of the deviators proportionality. The nonlinearity of viscoelastic properties is given in the form of Rabotnov's equations type. The creep and relaxation kernels are given by the fractional-exponential functions. The solutions are approved experimentally for the problems of the computation of tangential stresses relaxation in thin-walled elements made of high-density polyethylene.*

*Keywords: relaxation; nonlinear viscoelastic; the heredity kernels; complex stress states*

## Определение релаксации напряжений в тонкостенных трубчатых элементах из нелинейно-вязкоупругих материалов в условиях растяжения и кручения

Павлюк Я.В.

*Аннотация.* Решается задача из расчета релаксации напряжений в тонкостенных трубчатых элементах с нелинейно-вязкоупругих материалов в условиях двухосного напряженного состояния. Установлена зависимость между ядрами наследственности, задающими скалярные свойства изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии, и ядрами ползучести, полученными при одноосном растяжении и чистом кручении. Определяющие уравнения выбраны в форме, соответствующей гипотезе пропорциональности девиаторов. Нелинейность вязкоупругих свойств задается зависимостями между инвариантами тензоров деформаций и напряжений в форме уравнений типа модели Работнова. Решения апробированы экспериментально на задачах расчета релаксации нормальных и касательных напряжений в тонкостенных трубчатых элементах из полиэтилена высокой плотности ПЭВП.

*Ключевые слова:* релаксация; нелинейная вязкоупругость; ядро наследственности; сложное напряженное состояние

### Список літератури

1. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости. / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, В.С. Рагулина // Прикл. механика. – 2011. – Том 47, №3. – сс. 75-88.
2. Крегерс А.Ф., Килевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С. 195-201.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).