УДК 629.01 DOI: 10.20535/2409-7160.2023.XXIII.281350

Обмеження на інтегральні міри напруженого стану в задачах топологічної оптимізації

В.Ф. Кришталь, І.В. Янчевський
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Анотація: *Топологічною оптимізацією (ТО) називають обчислювальний метод визначення розподілу матеріалу у заданій області проєктування для створення оптимальної форми деталі при заданих граничних умовах. У класичній постановці ТО в якості критерію пошуку зазначеного розподілу обрана мінімізація піддатливості деталі при обмеженнях на об’єм (масу) результату оптимізації. Більш наближеною до прикладного застосування є постановка задачі ТО, що передбачає мінімізацію об'єму деталі з урахуванням умови її міцності. Залучення інтегральних мір напруженного стану має низку переваг над традиційною перевіркою максимального значення механічного напруження. У даному матеріалі наведені агрегатні функції для механічних напружень, які отримали найбільше розповсюдження в сучасних дослідженнях з питань ТО з урахуванням міцності оптимізованої деталі. Коротко проаналізована спеціалізація прикладного застосування наведених функцій.*
Ключові слова: *топологічна оптимізація; скінченні елементи; напруження; агрегатна функція*

Топологічною оптимізацією (ТО) називають обчислювальний метод визначення розподілу матеріалу у заданій області проєктування для створення оптимальної форми деталі чи елементу конструкції із заданими граничними умовами. Сучасні підходи до реалізації топологічної оптимізації побудовані на безпосередньому залученні методів математичного аналізу, співвідношень теорії пружності та методу скінченних елементів (МСЕ). У великій кількості публікацій за даною проблематикою у якості критерію пошуку оптимального розподілу матеріалу обрана мінімізація піддатливості конструкції (забезпечення максимальної її жорсткості) при обмеженнях на об’єм (масу) результату оптимізації. Проєктною змінною, за якою проводиться оптимізація, приймається відносна (умовна) густина ρ матеріалу кожного елементу СЕ-моделі, від якої залежить як модуль пружності матеріалу даного елементу, так і осереднене нормоване еквівалентне напруження $\hat{s}_e$ ($e=\overline{1,N}$; N – кількість скінченних елементів). Разом з тим більш наближеною до прикладного застосування є інша постановка задачі, яка передбачає мінімізацію об'єму проєктної деталі з урахуванням обмеження на рівень напруженого її стану.

Серед великого розмаїття постановок задач ТО, в яких враховується обмеження на напруження, слід виділити наступні. Насамперед, це узагальнена класична постановка з мінімізацією піддатливості, в якій до обмежень на об’єм області проєкту додається обмеження на напруження в скінченних елементах дискретної моделі ($\hat{s}_e \le 1$), або використовуються інтегральні міри напруженого стану у вигляді певних функцій цих напружень. Другу групу робіт складають роботи, в яких ставиться задача мінімізації об’єму проєктної області при обмеженнях на рівень напруженого стану. До третьої групи можна віднести роботи, в яких розглянуто задачі мінімізації напружень з обмеженнями на об’єм оптимізованої деталі.

Велика кількість робіт, присвяченних питанням ТО, опублікованих в останнє десятиріччя, свідчить про актуальність та важливе прикладне значення отриманих результатів.

При розв’язанні задач оптимізації з урахуванням умови міцності можна виділити такі суттєві проблеми як прямування напруження до нескінченності для малих умовних густин елементів (сингулярність) та локальність обмежень механічного напруження. Для вирішення проблеми сингулярності застосовуються методи ε-релаксації [1], qp-релаксації [2] та штрафування (“пеналізації”) [3]. Друга складність пов’язана з необхідністю перевірки виконання умови міцності для кожного елементу СЕ-моделі ($e=\overline{1,N}$), що вимагає багато машинного часу знаходження розв'язку задачі. Для вирішення цієї проблеми у низці робіт використовуються т.зв. агрегатні функції для обчислення інтегральних мір напруженого стану. Серед основних вимог до таких функцій слід відзначити вимогу до її гладкості та диференційовність. Використання агрегатних функцій дає можливість суттєво заощадити час розв'язання задачі ТО, зберегти контроль над напруженим станом і, відповідно, може відбуватись наближення задачі ТО з обмеженнями на напруження до класичної постановки з мінімізацією піддатливості.

Для обчислення інтегральних мір механічних напружень в задачах ТО використовуються т.зв. функції P - норми та P - середнього, KS-функції Крайсельмайера-Штайнхаузера, гладкі функції Хевісайда, міра перевищенних напружень та міра нерівномірності напруженого стану. Зазначені функції і представлені у даній доповіді.

Так, у авторів роботи [1] умови міцності проєктної деталі з інтегральними мірами її напруженого стану на основі функції P - норми (P - norm) та функції P - середнього (P - mean) записані наступним чином:

$$\left\{\sum_{e=1}^{N}\max_{e}\left(0,\frac{\hat{s}_e}{\rho_e^p}+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{\rho_e}\right)^P\right\}^{1/P}\le 1\,; \tag{1}$$

$$\left\{\frac{1}{N}\sum_{e=1}^{N}\max_{e}\left(0,\frac{\hat{s}_e}{\rho_e^p}+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{\rho_e}\right)^P\right\}^{1/P}\le 1\,, \tag{2}$$

де ρ_e – відносна (умовна) густина матеріалу; ε – деяке мале число; $p=3$.

Очевидно, що вирази для цих функцій основою мають L^P-норму Лебега та середнє степеневе значення аргументу, відповідно.

У згаданій роботі показано, що при великих значеннях параметра агрегації P проєкт з умовою міцності (1) більше нагадує проєкт з мінімальною піддатливістю, а проєкт з обмеженням (2) займає проміжне місце між розв'язком з мінімальною піддатливістю та розв'язком з обмеженнями на локальні напруження ($\hat{s}_e\le 1$). Малі P дозволяють уникати чисельної нестабільності задачі ТО, разом з тим максимальне значення локальних напружень може перевищувати обмежувальне значення ($\hat{s}_{\max}>1$).

Для вирішення цієї проблеми у статті [3] запропоновано нормувати інтегральну міру s_P напруженого стану через параметр нормалізації C_P, з яким обмеження набуває вигляду $C_P\cdot s_P-1\le 0$. Параметр нормалізації визначається як $C_P^{(j)}=\alpha\cdot\dfrac{\max\hat{s}_e^{(j-1)}}{s_P^{(j-1)}}+(1-\alpha)C_P^{(j-1)}$, де $s_P=\left(\sum_e \hat{s}_e^{\,P}\right)^{1/P}$, j - номер ітерації, α - коефіцієнт контролю. Пізніше, у роботі [4] було обрано інтегральну міру s_P на основі функції P- середнього з урахуванням методу ε- релаксації.

Однією з перших робіт, в якій було запропоновано використовувати для задач ТО інтегральну міру напруженого стану на основі KS-функції є робота [5]. З метою забезпечення стабільності обчислень у роботі [6] було запропоновано використовувати наступний запис обмеження інтегральної міри напруженого стану

$$G_{\mathrm{KS}} \le \frac{1}{\mu} \ln N, \tag{3}$$

де
$$G_{\mathrm{KS}} = \frac{1}{\mu} \ln \sum_e \exp\left(\mu \frac{\hat{s}_e - \hat{s}_{\max}\varphi_e}{\hat{s}_{\max}\varphi_e}\right), \tag{4}$$

$\varphi_e = 1 - \varepsilon + \varepsilon/\rho_e$ – коефіцієнт релаксації напруження для уникнення явища сингулярності; μ –безвимірний параметр агрегації ($\mu > 0$).

Як зазначають автори [6], з виразу (4) слідує, що обмеження (3) стає еквівалентним обмеженню для найбільшого значення $\hat{s}_{\max}$ у випадку прямування μ до нескінченності. Але зі зростанням параметру μ посилюється нелінійність даної міри, що обумовлює важливість обґрунтованого вибору його значення.

У якості інтегральної функції для напруженого стану у роботі [7] пропонується обирати нижню межу KS-функції $G^L_{\mathrm{KS}} = \frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{1}{N}\sum_e \exp(\mu \bar{g}_e)\right)$, яку також називають середнім експоненційним. Тут $\bar{g}_e = \rho_e(\hat{s}_e - 1)$ ($e = \overline{1, N}$). У роботі [7] показано, що застосування обмеження у вигляді G^L_{KS} дозволяє алгоритму оптимізації подолати проблему сингулярності напружень та отримати оптимальні рішення без додаткового послаблення обмежень.

З метою досягнення "чорно-білих" проєктів ($\rho_e = 1$ або 0) автори [8] використовують гладкий диференційований аналог функції Хевісайда – $\mathrm{H}_\alpha(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]$, де α ($\alpha = 0+$) – параметр для контролю крутизни функції $\mathrm{H}_\alpha(x)$. Обмеження для інтегральної міри напруженого стану з релаксацією на основі $\mathrm{H}_\alpha(x)$ представлене авторами [8] наступним чином – $g_{\mathrm{H}} = \frac{1}{N}\sum_e \mathrm{H}_\alpha(\hat{s}_e - 1) \cdot \hat{s}_e^{\eta_h} \le \delta$, де η_h – коефіцієнт компенсації напруження.

У роботі [9] запропоновано у обмеженні на напружений стан враховувати як максимальне значення локальних, так і суму квадратів “перевищених” напружень:

$$f_\sigma = \hat{s}_{\max} + \sum_{e \in A} (\hat{s}_e - 1)^2 \le 1. \tag{5}$$

У цій статті показано, що умова міцності (5) не потребує встановлення додаткових параметрів і більше підходить для постановки задачі ТО з мінімізацією піддатливості.

У роботі [10] запропоновано альтернативну умову міцності для задач ТО, яка орієнтована на мінімізацію нерівномірності розподілу напруженого стану серед СЕ з ненульовою відносною густиною ($\rho_e > \rho_{\min}$). Зокрема, замість класичного критерію $\hat{s}_e \le 1$ ставиться задача пошуку мінімуму відношення, геометрична інтерпретація якого представляє собою мінімізацію відношення площі області між еквівалентними напруженнями $\hat{s}_e$ і лінійною їх апроксимацією $\bar{s}_e$ до площі трапеції під прямою $\bar{s}_e$. Автори [10] зазначають, що запропонований ними критерій дозволяє зменшити вплив локальних пікових значень напружень на результат оптимізації і забезпечити кращу його рівноміцність. До недоліків даного критерію відноситься необхідність пошуку оптимального результату на усьому діапазоні можливих значень осередненої густини розрахункової області. У якості принципових переваг запропонованого критерію зазначаються зменшена кількість вхідних даних, забезпечення кращої рівноміцності оптимізованої топології і нечутливість результату до похибок у обчисленнях.

Список літератури

1. Duysinx P., Miegroet L.V. [et al.] Topology and generalized shape optimisation: why stress constraints are so important // Int. J. for Sim. and Multidisc. Des. Optim. – 2008. – Vol. 2. DOI: 10.1051/IJSMDO/2008034.
2. Bruggi, M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. - 2008. - Vol. 36. - P. 125-141. DOI: 10.1007/S00158-007-0203-6.
3. Le C.H., Norato J.A. [et al.] Stress-based topology optimization for continua // Struct. and Multidisc. Optim. – 2010. – Vol. 41. – Iss. 4. – P. 605-620. DOI: 10.1007/S00158-009-0440-Y.
4. da Silva G.A., Aage N., Beck A.T., & Sigmund, O. Local versus global stress constraint strategies in topology optimization: A comparative study // International Journal for Numerical Methods in Engineering - 2021. - Vol. 122 - P. 6003-6036. DOI: 10.1002/nme.6781.
5. Yang R., Chen C.J. Stress-based topology optimization // Struct. Optim. – 1996. – Vol. 12. – P. 98-105. DOI: 10.1007/BF01196941.
6. París J., Navarrina F., Colominas I., Casteleiro M. Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures // Adv. Eng. Softw. – 2010. – Vol. 41. Iss. 3. – P. 433-441. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2009.03.006.
7. Verbart A., Langelaar M., Keulen F.V. A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization // Struct. and Multidisc. Optim. – 2017. – Vol. 55. – P. 663-679. DOI: 10.1007/S00158-016-1524-0.
8. Wang, C., Qian, X. Heaviside projection–based aggregation in stress–constrained topology optimization // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2018. – Vol. 115. – P. 849-871. DOI: 10.1002/nme.5828.
9. Yang D., Liu H., Zhang W., Li, S.C. Stress-constrained topology optimization based on maximum stress measures // Computers & Structures - 2018. - Vol. 198. - P. 23-39. DOI: 10.1016/J.COMPSTRUC.2018.01.008
10. Yanchevskyi I.V., Kryshtal V.F. Integral criterion of the non-uniformity of stress distribution for the topology optimization of 2D-models // J. of Mech. Eng. – 2021. – Vol. 24, Iss. 1. – P. 65-74. DOI: 10.15407/pmach2021.01.065.

Limitation of stress state integral measures in problems of topology optimization

V.F. Kryshtal, I.V. Yanchevskyi

Abstract: *Topology optimization (TO) is a computational method of determining material distribution in a known design area to create the optimal shape of a part with known boundary conditions. In the classical statement of TO, the minimization of the part's flexibility with restrictions on the volume (mass) of the optimization result are chosen as criterions for finding the specified distribution. The statement, which involves minimizing the volume of the part taking into account the condition of its strength, is closer to technical application. Integral measures of the stress state have a number of advantages over the traditional control of the maximum value of mechanical stress. In this report, aggregate functions for mechanical stresses, which have received the most distribution in modern research on TO taking into account the strength of the optimized part, are given. The specialization of technical application of the given functions is briefly analyzed.*

Keywords: *topology optimization; finite elements; stress; aggregate function*