УДК 539.3

Вимушені коливання в'язкоелектропружної шаруватої циліндричної панелі з урахуванням геометричної нелінійності і деформацій зсуву

Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Зінчук Л.П.
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ, Київ, Україна

Анотація. *Дана робота присвячена розробці методу дослідження вимушених коливань тришарових в'язкоелектропружних циліндричних оболонок обертання при гармонічному електромеханічному зовнішньому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву, які змінюються в кожному шарі за квадратичним законом по товщинній координаті. Механічні гіпотези доповнені гіпотезами про розподіл по товщині електричних польових величин, коли вважається, що відмінними від нуля є компоненти вектора напруженості електричного поля і нормальна складова електричної індукції. На основі варіаційної постановки задачі з використанням представлення розв'язку у вигляді подвійних рядів Фур'є задача про резонансні нелінійні коливання шарнірно опертої шаруватої циліндричної панелі при дії на неї нормального тиску і електричного навантаження зведена до аналізу диференційного рівняння другого порядку з квадратичною і кубічною нелінійністю, яке розв'язується методом гармонічної лінеаризації.*
Ключові слова: *шарувата в'язкоелектропружна оболонка; вимушені коливання; геометрична нелінійність; деформації поперечного зсуву.*

Характерною особливістю в розвитку сучасних методів дослідження динамічної поведінки шаруватих тонкостінних п'єзоелектричних елементів є врахування нелінійного характеру їх деформування. Для моделювання механічної поведінки таких елементів використовуються різні гіпотези [1, 2]. Якщо вони виготовлені з анізотропного матеріалу і їх товщина недостатньо мала, використання класичних гіпотез Кірхгофа-Лява може привести до значних похибок при числових розрахунках для оболонок обертання. У таких випадках доцільно використовувати уточнені механічні моделі.

У даній роботі представлено метод дослідження вимушених коливань шаруватих п'єзоелектричних оболонок обертання при електромеханічному навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності і деформацій поперечного зсуву з використанням теорії, що базується на гіпотезі про пошарову апроксимацію деформацій зсуву квадратичними функціями по товщині оболонки.

Розглянемо тришарову оболонку обертання з товщиною $H = h_1 + h_2 + h_3$, складену з трасверсально-ізотропних в'язкопружних п'єзоелектричних шарів з товщинною поляризацією. Оболонка віднесена до криволінійної ортогональної системи координат (s, θ, z). Як базисну, вибираємо серединну поверхню внутрішнього шару оболонки. Приймається $\sigma_{zz} = 0$ і квадратичний закон зміни зсувних деформацій ε_{sz} і $\varepsilon_{\theta z}$ в межах кожного шару. При цьому зсувні напруження $\sigma_{zs}, \sigma_{\theta z}$ повинні задовольняти умовам контакту між шарами. Меридіан базисної поверхні описується рівнянням $r = r(x)$, де x відраховується вздовж осі обертання. На п'єзоелектричних поверхнях $z = a_0, a_1, a_2, a_3$ (a_0, a_1 обмежують перший зовнішній шар; a_1, a_2 – середній шар, а a_2, a_3 – другий зовнішній шар оболонки) нанесено суцільні або дискретні електродні покриття, на яких задаються відповідні значення потенціалів φ_0, φ_1, φ_2, φ_3. Для моделювання електромеханічної поведінки матеріалів використовується концепція комплексних характеристик [3]. Спрощені визначальні рівняння одержуємо на основі вказаних вище уточнених механічних гіпотез, доповнених адекватними їм гіпотезами про розподіл по товщині електричних польових величин, коли вважається, що відмінними від нуля є компоненти вектора напруженості електричного поля E_z, E_s, E_θ і нормальна складова електричної індукції ($D_z \neq 0$, $D_s = 0$, $D_\theta = 0$). При цьому спрощені комплексні рівняння стану для k-го шару приймають вигляд

$$\sigma_{ss}^{(k)} = B_{11}^{(k)}\varepsilon_{ss}^{(k)} + B_{12}^{(k)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} - \gamma_{11}^{(k)}E_z^{(k)},\ \sigma_{\theta\theta}^{(k)} = B_{12}^{(k)}\varepsilon_{ss}^{(k)} + B_{11}^{(k)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} - \gamma_{11}^{(k)}E_z^{(k)},\ \sigma_{s\theta}^{(k)} = 2G_{12}^{(k)}\varepsilon_{s\theta}^{(k)},$$

$$\sigma_{sz}^{(k)} = 2G_{13}^{(k)}\varepsilon_{sz}^{(k)},\ \sigma_{\theta z}^{(k)} = 2G_{23}^{(k)}\varepsilon_{\theta z}^{(k)},\ D_z^{(k)} = \gamma_{33}^{(k)}E_z^{(k)} + \gamma_{11}^{(k)}\left(\varepsilon_{ss}^{(k)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)}\right), \tag{1}$$

де $B_{11}^{(k)} = c_{11}^{E(k)} - (c_{13}^{E(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}$, $B_{12}^{(k)} = c_{12}^{E(k)} - (c_{13}^{E(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}$, $\gamma_{11}^{(k)} = e_{13}^{(k)} - c_{13}^{E(k)}e_{33}^{(k)} / c_{33}^{E(k)}$, $\gamma_{33}^{(k)} = \mu_{33}^{S(k)} + (e_{33}^{(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}$, $G_{12}^{(k)} = c_{11}^{E(k)} - c_{12}^{E(k)}$, $G_{13}^{(k)} = G_{23}^{(k)} = c_{44}^{E(k)} + (e_{15}^{(k)})^2 / \mu_{11}^{S(k)}$, а $c_{ij}^{E(k)}$, $e_{ij}^{(k)}$ – відповідно в'язкопружні та п'єзоелектричні модулі, а μ_{ij}^S – діелектричні проникливості k-го п'єзоелектричного шару [2, 3]. Якщо середній шар ($k = 2$) пасивний, то $e_{ij}^{(2)} = 0$. У рівняннях стану (1) зсувні напруження апроксимуються квадратичними функціями по координаті z. Відповідно до теорії, представленої в [1], в кожному шарі вони можуть бути записані у вигляді:

$$\sigma_{sz}^{(k)} = \sigma_{s3}^{(k)} = G_{13}^{(k)}u_1(s,\theta)q^{(k)}(z),\ \sigma_{\theta z}^{(k)} = \sigma_{\theta 3}^{(k)} = G_{13}^{(k)}v_1(s,\theta)q^{(k)}(z),\ (k = 1,2,3).$$

Функції $u_1(s,\theta)$, $v_1(s,\theta)$ знаходяться з розв'язку задачі для всього пакету шарів, а $\sigma_{sz}^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)}$, $\sigma_{\theta 3}^{(k)} = \sigma_{23}^{(k)}$ знаходяться шляхом інтегрування рівнянь рівноваги. Поперечні зсувні деформації для кожного шару знаходяться з рівнянь стану (1)

$$\varepsilon_{sz}^{(k)} = \varepsilon_{13}^{(k)} = \frac{1}{2}u_1(s,\theta)q^{(k)}(z),\ \varepsilon_{\theta z}^{(k)} = \varepsilon_{23}^{(k)} = \frac{1}{2}v_1(s,\theta)q^{(k)}(z). \tag{2}$$

В подальшому будемо розглядати такі оболонки, для яких можна знехтувати z/R_1 та z/R_2 в порівнянні з 1 (R_1, R_2 – радіуси головних кривизн базової поверхні). У цьому випадку, наприклад, для тришарової оболонки симетричної будови, коли

$$B_{11}^{(1)} = B_{11}^{(3)},\ G_{13}^{(1)} = G_{13}^{(3)},\ G_{23}^{(1)} = G_{23}^{(3)},\ a_3 = -a_0,\ a_2 = -a_1,$$

апроксимуючі функції $q^{(k)}(z)$ $(k = 1,2,3)$ можна записати у вигляді:

$$q^{(1)}(z) = \frac{B_{11}^{(1)}}{2G_{13}^{(1)}}\left(1 - \frac{z^2}{a_0^2}\right),\ q^{(3)}(z) = q^{(1)}(z),\ q^{(2)}(z) = \frac{B_{11}^{(2)}}{2G_{13}^{(2)}}\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{z^2}{a_0^2} + \frac{B_{11}^{(1)}}{B_{11}^{(2)}}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\right).$$

Використовуючи співвідношення Коші, після інтегрування виразів (2) по товщині компоненти вектора зміщень запишемо у вигляді:

$$u^{(k)} = u_0 - \frac{\partial w}{\partial s}z + u_1 f^{(k)}(z),\ v^{(k)} = v_0 - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}z + v_1 f^{(k)}(z), \tag{3}$$

де u_0, v_0 – тангенціальні зміщення базової поверхні $z = 0$, w – нормальний прогин оболонки, а

$$f^{(k)}(z) = f_1^{(k)}(z) + f_0^{(k)},\ f_1^{(1)}(z) = \frac{B_{11}^{(1)}}{2G_{13}^{(1)}}\left(z - \frac{z^3}{3a_0^2}\right),$$

$$f_1^{(2)}(z) = \frac{B_{11}^{(2)}}{2G_{13}^{(2)}}\left(\left[\frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{B_{11}^{(1)}}{B_{11}^{(2)}}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\right]z - \frac{z^3}{3a_0^2}\right),\ f_1^{(3)}(z) = f_1^{(1)}(z),$$

$$f_0^{(1)} = \frac{B_{11}^{(2)}}{2G_{13}^{(2)}}\left(\frac{2a_1^3}{3a_0^2} + \frac{B_{11}^{(1)}}{B_{11}^{(2)}}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)a_1\right) - \frac{B_{11}^{(1)}}{2G_{13}^{(1)}}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)a_1,\ f_0^{(2)} = 0,\ f_0^{(3)} = -f_0^{(1)}.$$

З використанням залежностей (3) і співвідношень Коші [4] для компонент тензора деформацій k-го шару матимемо:

$$\varepsilon_{ss}^{(k)} = \varepsilon_{ss}^{0} + \kappa_{ss} z + \delta_{ss} f^{(k)}(z),\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{0} + \kappa_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^{(k)}(z),\ \varepsilon_{s\theta}^{(k)} = \varepsilon_{s\theta}^{0} + \kappa_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^{(k)}(z),$$

$$\varepsilon_{s\theta}^{(k)} = \frac{1}{2} u_1 q^{(k)}(z),\ \varepsilon_{\theta z}^{(k)} = \frac{1}{2} v_1 q^{(k)}(z).$$

У подальшому будемо досліджувати нелінійні коливання шарнірно опертої тришарової циліндричної панелі при механічному і електричному навантаженнях. Вводячи позначення $x = s\ (0 \le x \le a)$, $y = R\theta\ (0 \le y \le b)$, зв'язок між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора зміщень визначаються такими нелінійними залежностями

$$\varepsilon_{xx}^{0} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\ \kappa_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \delta_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x},\ \varepsilon_{yy}^{0} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\ \kappa_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\delta_{yy} = \frac{\partial v_1}{\partial y},\ \varepsilon_{xy}^{0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\ \delta_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right).$$

Відповідно до вказаної вище гіпотези відносно індукції D_z для кожного п'єзошару $D_z^{(k)} = D_z^{(k)}(x, y)$. Після інтегрування компоненти вектора напруженості електричного поля $E_z^{(k)}$ [2] по товщині оболонки одержимо

$$D_z^{(k)}(x, y) = -\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{H_1^{(k)}} + \left(\varepsilon_{xx}^{0} + \varepsilon_{yy}^{0}\right)\frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}} + \left(\kappa_{xx} + \kappa_{yy}\right)\frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}} + \left(\delta_{xx} + \delta_{yy}\right)\frac{H_4^{(k)}}{H_1^{(k)}}. \tag{4}$$

Нехтуючи інерційними силами для тангенціальних і зсувних складових, розв'язок задачі про нелінійні коливання циліндричної панелі при дії на неї нормального тиску $P(t)$ і електричного навантаження на кожному з електродів знаходиться з використанням варіаційного рівняння [4, 5]

$$\delta Э = \delta Э_1 + \delta Э_2 = 0, \tag{5}$$

де

$$Э_1 = \frac{1}{2}\iint_F \Big\{ C_{11}\left(\varepsilon_{xx}^{0}\right)^2 + 2C_{12}\varepsilon_{xx}^{0}\varepsilon_{yy}^{0} + C_{11}\left(\varepsilon_{yy}^{0}\right)^2 + 4C_{66}\left(\varepsilon_{xy}^{0}\right)^2 + C_{55}\left(u_1^2 + v_1^2\right) + D_{11}\left(\kappa_{xx}\right)^2 + 2D_{12}\kappa_{xx}\kappa_{yy} +$$
$$+ D_{11}\left(\kappa_{yy}\right)^2 + 4D_{66}\left(\kappa_{xy}\right)^2 - 2\left[D_{11}^{z}\kappa_{xx}\delta_{xx} + D_{12}^{z}\left(\kappa_{xx}\delta_{yy} + \kappa_{yy}\delta_{xx}\right) + D_{11}^{z}\kappa_{yy}\delta_{yy} + 4D_{66}^{z}\kappa_{xy}\delta_{xy}\right] +$$
$$+ D_{11}^{\delta}\left(\delta_{xx}\right)^2 + 2D_{12}^{\delta}\delta_{xx}\delta_{yy} + D_{11}^{\delta}\left(\delta_{yy}\right)^2 + 4D_{66}^{\delta}\left(\delta_{xy}\right)^2 + 2\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}w + 2\zeta\frac{\partial w}{\partial t}w \Big\} dF,$$

$$Э_2 = \frac{1}{2}\iint_F \left\{ \left[\left(\varepsilon_{xx}^{0} + \varepsilon_{yy}^{0}\right)H_1^{*} + \left(\kappa_{xx} + \kappa_{yy}\right)H_2^{*} + \left(\delta_{xx} + \delta_{yy}\right)H_3^{*}\right] - Pw \right\} dF \tag{6}$$

при наступних початкових

$$w = 0,\ \partial w/\partial t = 0 \ \text{ при } \ t = 0$$

та граничних умовах

$$w = 0,\ \partial^2 w/\partial x^2 = 0,\ v_0 = 0,\ v_1 = 0 \ \text{ при } \ x = 0,\ x = a;$$
$$w = 0,\ \partial^2 w/\partial y^2 = 0,\ u_0 = 0,\ u_1 = 0 \ \text{ при } \ y = 0,\ y = b. \tag{7}$$

У виразах (4), (6) ζ – коефіцієнт демпфування, $H_l^{(k)}$, C_{ij}, D_{ij}, D_{ij}^{δ}, D_{ij}^{z}, ρ_1 виражаються через геометричні і фізико-механічні характеристики шарів оболонки, а $H_i^{*} = \sum_{k=1}^{3}(\varphi_k - \varphi_{k-1})\, H_{i+1}^{(k)} / H_1^{(k)}$ $(i = 1,2,3)$ [4].

Враховуючи умови (7), розв'язок задачі шукається у вигляді подвійних рядів Фур'є

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos(k_m x)\sin(p_n y),\ v_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin(k_m x)\cos(p_n y),$$

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^1 \cos(k_m x)\sin(p_n y),\ v_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^1 \sin(k_m x)\cos(p_n y),$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin(k_m x)\sin(p_n y)\ \ (k_m = m\pi/a,\ p_n = n\pi/b).$$

Використовуючи варіаційне рівняння (5), отримаємо систему рівнянь, розв’язуючи яку для визначення амплітудних значень прогину оболонки w_{mn} одержимо нелінійне диференційне рівняння другого порядку з квадратичною і кубічною нелінійністю

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \zeta_{mn}\frac{dw_{mn}}{dt} + \omega_{mn}^2 w_{mn} + \beta_1 (w_{mn})^2 + \beta_2 (w_{mn})^3 = P_{mn} + \varphi_{mn}^*, \quad (8)$$

де ζ_{mn} – коефіцієнт демпфування для відповідної моди коливань, а ω_{mn} (власна частота згинальних коливань оболонки) та β_j, P_{mn}, φ_{mn}^* визначаються через k_m, p_n, H_l^*, C_{ij}, D_{ij}, D_{ij}^{δ}, D_{ij}^{z} та геометричні і фізико-механічні параметри панелі.

Нелінійне диференційне рівняння (8) розв’язується методом гармонічної лінеаризації [6]. Проведено числове дослідження розподілу максимального значення прогину циліндричної панелі в околі першої резонансної частоти при різних геометричних і фізико-механічних характеристиках шарів. Як частинний випадок, отримано розв’язки нелінійної задачі, яка базується на класичній теорії Кірхгофа-Лява.

Список літератури

1. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища школа. –1986. –191 с.
2. Гринченко В. Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с.
3. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.
4. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В. Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п’єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – № 94. –С. 75–95.
5. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И. Термомеханика неупругих тонкостенных элементов конструкций с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом нагружении (обзор) // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 1. – С. 9 – 74.
6. Чечурин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. – Л.: Из-во Ленинградского университета, 1983. – 220 с.

Forced vibrations of viscoelectroelastic layered cylindrical panel taking into account geometric nonlinearity and shear deformations

Karnaukhov Vasyl, Kozlov Volodymyr, Zinchuk Liubov

Abstract. *This work is devoted to the development of a method for studying the forced vibrations of three-layer viscoelectroelastic cylindrical shells of rotation under harmonic electromechanical external load taking into account geometric nonlinearity and transverse shear deformations, which vary in each layer by the thickness quadratic law. Mechanical hypotheses are supplemented by hypotheses about the thickness distribution of electric field quantities, when it is assumed that the components of the electric field strength vector and the normal component of electric induction are nonzero. Based on the variational formulation of the problem with using the representation of the solution in the form of double Fourier series, the problem of resonant nonlinear oscillations of a hinged layered cylindrical panel under normal pressure and electric load is reduced to the analysis of the second-order differential equation with quadratic and cubic nonlinearity, which is solved by the method of harmonic linearization.*
Keywords: *layered viscoelectroelastic shell; forced vibrations; geometric nonlinearity; transverse shear deformation.*