

УДК 539.376

DOI: 10.20535/2409-7160.2023.XXIII.265437

Моделювання релаксації напружень за умов циклічного деформування нелінійно-в'язкопружних матеріалів за допомогою функції Хевісайда

Я.В. Павлюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ, Україна

Анотація. Розглядається задача розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов циклічного деформування, що задається у вигляді циклічних чергувань навантажень та розвантажень рівної амплітуди за прямокутними циклами, при чому тривалість напівциклів навантаження та розвантаження співпадають. Програма навантаження реалізується у вигляді послідовності елементарних навантажень, що задається за допомогою одиничних функцій Хевісайда. Для опису процесу деформування використовується нелінійна модель повзучості з незалежною в часі нелінійністю типу моделі Работнова. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, нелінійна релаксація, дробово-експоненційне ядро спадковості, нелінійно-в'язкопружні матеріали, циклічне деформування.

Вступ

Довговічність, надійність та працездатність відповідальних елементів конструкцій сучасної техніки суттєво залежить від ефективності обраних моделей деформування та методів визначення деформівних властивостей конструкційних матеріалів на стадії їх проектування. Особливо актуальною є ця задача для в'язкопружних конструкційних матеріалів, деформування яких залежить як від часу, так і від історії навантаження. В процесі експлуатації в'язкопружні матеріали у відповідальних елементах багатьох сучасних конструкцій деформуються і руйнуються в нелінійній області при нестационарних режимах навантаження. Особливо актуальними є задачі релаксації напружень, що викликає перерозподілення напружень в елементах конструкцій в часі і порушення функціональних можливостей конструкції в цілому.

Актуальними лишаються питання вибору та обґрунтування структури нелінійної моделі, вибору структури ядра спадковості та практичної реалізації методики визначення параметрів ядра, а також питання їх експериментальної апробації. Фактично нерозв'язаними залишаються задачі розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестационарного деформування.

1. Постановка задачі

Визначальні рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності з незалежною від часу нелінійністю задаються співвідношеннями [1]:

$$\begin{aligned}\varphi_0(\varepsilon(t)) &= \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \\ \sigma(t) &= \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau)\varphi_0(\varepsilon(\tau))d\tau,\end{aligned}\quad (1.1)$$

де $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(\tau)$ – повна деформація, що містить пружну компоненту ε^e і компоненту повзучості ε^c в моменти часу t і τ ; $\varphi_0(\cdot)$ – функція, що задає діаграму миттєвого деформування і визначається експериментально; λ – реологічний параметр ($\lambda > 0$); $K(t-\tau)$, $R(t-\tau)$ – ядра повзучості і релаксації відповідно.

Нелінійність процесів повзучості, що задає рівняння (1) визначається видом функції $\varphi_0(\cdot)$, яка в роботі задається за допомогою згладжуючих кубічних сплайнів виду

$$\varphi_0(\varepsilon_e) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon_e + a_{2,j}\varepsilon_e^2 + a_{3,j}\varepsilon_e^3, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

де $a_{0,j}, a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що мають розмірність напруження і залежать від інтервалу розподілу осі деформацій.

Ядра спадковості $K(t-\tau)$ та $R(t-\tau)$ задаються дробово-експоненційними функціями:

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}; \quad (1.3)$$

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.4)$$

де α, β – параметри ядер, що підлягають визначенню з експеримента, $-1 < \alpha < 0, \beta > 0$.

Із використанням процедури обернення функцій визначальні рівняння (1) записуються так:

$$\varepsilon(t) = \psi_0 \left[\sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right] \quad (1.5)$$

$$\sigma(t) = \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau)\varphi_0(\varepsilon(\tau))d\tau,$$

тут $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$ – обернення функції $\varphi_0(\cdot)$, яке задається співвідношенням

$$\varphi_0(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

тут $b_{0,j}, b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що апроксимують обернену функцію $\varphi_0^{-1}(\cdot)$.

Довільний закон зміни напружень σ_t і деформацій ε_t в момент навантаження τ задається у вигляді суми множин різних значень сталих напружень σ_k і деформацій ε_k :

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1}))\sigma_k; \quad (1.7)$$

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1}))\varepsilon_k,$$

де $h(\cdot)$ – одинична функція Хевісайда, що має розрив першого роду за умови $t = \tau$; t – момент спостереження ($t \geq \tau$).

У рамках рівнянь (1.5) розв'язується задача, щодо розрахунку релаксації напружень за умов циклічного деформування плексигласу. Результати розрахунків зіставляються з експериментальними даними [3].

Задача включає експериментальне обґрунтування гіпотези подібності для досліджених матеріалів, визначення параметрів, що входять до визначальних рівнянь, та експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку релаксації напружень за умов та циклічного деформування.

2. Обґрунтування існування єдиної ізохронної діаграми деформування

Визначальні рівняння моделі в'язкопружності побудовано за умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування, що відображає подібність ізохронних діаграм повзучості і

діаграми миттєвого деформування. Нелінійність моделі визначається нелінійністю діаграми миттєвого деформування і не залежить від часу. Гіпотеза обґрунтовується методом зведення ізохронних діаграм повзучості $\varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$ до діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon_i(0), 0)$. Де коефіцієнт пропорційності визначає значення функцій подібності $1 + G(t_j)$, що знайдено для кожної j -ої ізохронної діаграми повзучості:

$$\frac{1}{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{\varphi_0(\varepsilon_i, 0) \cdot \varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}}{\sum_{i=1}^q \{\varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}^2} \quad (2.1)$$

Вважається, що єдина ізохронна діаграма деформування обґрунтована з похибкою δ , якщо наведені ізохронні діаграми не виходять за межі інтервалу, обмеженого величиною δ по відношенню до діаграми миттєвого деформування. З достатньою для практичних інтересів величиною δ прийнята рівною $\pm 5\%$.

Результати експериментального обґрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування для плексигласу наведено на рис. 1,а. Видно, що приведені ізохронні діаграми повзучості (точки) не виходять за межі інтервалу $\pm 5\%$ (штрихові лінії) від діаграми

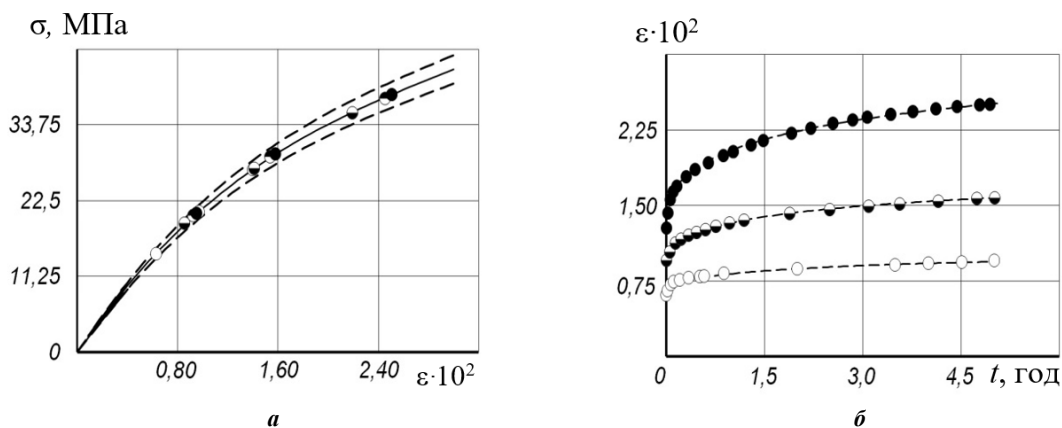


Рис. 1. Єдина ізохронна діаграма миттєвого деформування та криві повзучості плексигласу: а – діаграма миттєвого деформування (суцільна лінія), граничне значення (штрихові лінії), дискретні значення приведених ізохронних кривих (точки); б – розрахункові (лінії) та експериментальні (точки) значення деформацій стаціонарної повзучості плексигласу ($\sigma_k = 13,7$ (○), $19,6$ (◐), $25,5$ (●) МПа)

миттєвого деформування (суцільні лінії). Це свідчить, що гіпотеза єдиної ізохронної діаграми деформування обґрунтована з похибкою $\delta = 10\%$.

3. Визначення параметрів моделі

Значення параметрів ядер спадковості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер повзучості дробово-експоненційною функцією (1.3) за методикою викладеною в [1]. Значення параметрів ядра α, β, λ , для плексигласу такі: $\alpha = -0,601$; $\beta = 0,4673 \text{ год}^{-(1+\alpha)}$; $\lambda = 0,441 \text{ год}^{-(1+\alpha)}$. Порівняння розрахункових даних з експериментальними свідчить про їх задовільне узгодження.

Значення коефіцієнтів сплайн апроксимації (1.6), які задають зворотню діаграму миттєвого деформування $\varphi_0(\cdot)$ у рівнянні (1.5), для плексигласу такі: $b_3 = 2,3432728 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3}$; $b_2 = -2,9031164 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-2}$; $b_1 = 4,2250456796 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}$; $b_0 = 0$.

4. Повзучість за умов стаціонарного навантаження

Найпростіша перевірка застосування дробно-експоненційного ядра (1.3) і параметрів ядра, знайдених за єдиною функцією повзучості для вирішення задач нелінійної теорії в'язкопружності може бути здійснена на прикладі розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях. Умова навантаження (1.7) постійним у часі напруженнями при варіюванні величини напруження σ_k задається співвідношенням

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k; \quad k = \overline{1, m}. \quad (4.1)$$

Визначальне рівняння повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умови постійних напружень, на основі з (1.5) з урахуванням (4.1) та (1.6), записується у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = b_{0,j} + b_{1,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + b_{2,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right)^2 + \\ + b_{3,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right)^3, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

В режимі стаціонарного навантаження (4.1) на підставі рівняння (4.2), розраховано та експериментально апробовано деформації повзучості плексигласу для декількох рівнів постійних напружень $\sigma_k = 13,7$ (○), $19,6$ (⊖), $25,5$ (●) МПа. Результати розрахунків наведені на рис. 1б штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками. В цілому, як видно з рис. 1б, дробово-експоненційне ядро (1.2) і параметри ядра, забезпечують задовільне узгодження результатів розрахунку деформацій повзучості з експериментальними даними.

5. Розрахунок релаксації напружень за умов циклічного деформування

Умова навантаження (1.7) для режиму циклічного деформування, що задається програмою навантаження наведеною на рис. 2а, конкретизується у вигляді:

$$\varepsilon(t) = h(t-t_1)\varepsilon_1 \pm \sum_{k=1}^{2\nu-1} h(t-t_{k+1})|\Delta\varepsilon_k|, \quad (5.1)$$

де ε_1 – початкове значення деформації в момент часу t_1 ; $\Delta\varepsilon_k$ – амплітуда напруження у циклі $\Delta\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k$ – приріст ($\varepsilon_{k+1} > \varepsilon_k$) або зменшення ($\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$) деформації в момент часу t_k ; ν – число циклів деформування.

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умови циклічного деформування на основі (1.5) з урахуванням (5.1), записується так:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \sum_{i=1}^3 a_{i,j} \left\{ \left(h(t-t_1)\varepsilon_1(0) \pm \sum_{k=1}^{2\nu-1} h(t-t_{k+1})|\Delta\varepsilon_k| \right)^i - \lambda \left[\sum_{k=1}^{2\nu-1} (\varepsilon_k)^i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_k)^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(n+1)]} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_{k+1})^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(n+1)]} \right) + (\varepsilon_{2\nu})^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_{2\nu})^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(n+1)]} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

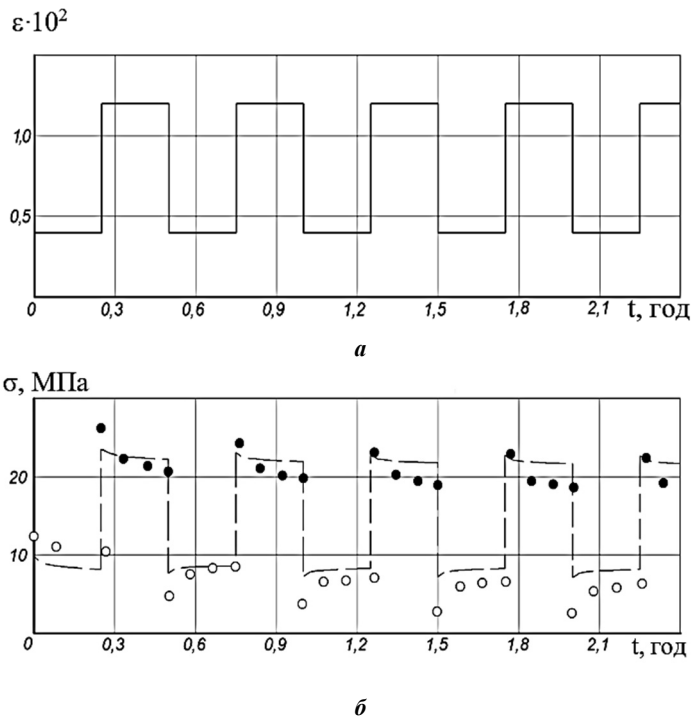


Рис. 2. Програма навантаження (а) та розрахункові (лінії) і експериментальні (точки) значення релаксації напружень плексигласу (б): \circ – $\varepsilon_k = 0,004$, \bullet – $\varepsilon_k = 0,012$.

Висновки

Результати розрахунку на рис. 2б свідчать, що структура запропонованої моделі дозволяє якісно описати процеси нестационарної релаксації. Варто відмітити, що розрахунки проводились із використанням параметрів, отриманих із базового експерименту на повзучість. Похибка одержана в режимі циклічного навантаження (рис. 2б), що зумовлена виникненням в процесі деформування незворотних деформацій, які моделлю не враховуються.

Список літератури

1. V.P. Golub, Y.V. Pavlyuk, and P.V. Fernati, “Determining Parameters of Fractional–Exponential Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials”, *Int Appl Mech*, vol. 53, pp. 419–433, 2017.
2. B.P. Maslov, “Nonlinear Hereditary Creep of Isotropic Composites of Random Structure”, *Int Appl Mech*, vol. 58, pp. 75–90, 2022.
3. Y.V. Pavlyuk, “Modeling of the Stress Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials Under Unsteady Deformation Conditions”, *Strength Mater*, vol. 49, pp. 652–659, 2017.
4. A. Kasgoz, Mechanical, "Tensile Creep and Viscoelastic Properties of Thermoplastic Polyurethane/Polycarbonate Blends," *Fibers Polym*, vol. 22, pp. 295–305, 2021.
5. R.M. Guedes, A. Singh, & V. Pinto, “Viscoelastic modelling of creep and stress relaxation behaviour in PLA-PCL fibres”, *Fibers Polym*, vol. 18, pp. 2443–2453, 2017.

Modeling stress relaxation under conditions of cyclic deformation of nonlinear viscoelastic materials using the Heaviside function

Y.V. Pavlyuk

Abstract: The problem of calculating the stress relaxation of nonlinear viscoelastic materials under conditions of cyclic deformation is considered, which is given in the form of cyclic alternations of loading and unloading of equal amplitude in rectangular cycles, while the duration of half-cycles of loading and unloading coincide. The load program is implemented in the form of a sequence of elementary loads, which is specified using Heaviside's unit functions. A nonlinear creep model with time-independent nonlinearity of the Rabotnov model is used to describe the deformation process. The heredity kernels are given by Rabotnov's fractional-exponential function.

Keywords: nonlinear viscoelastic, nonlinear creep, nonlinear relaxation, exponential-fractional hereditary kernel, nonlinear viscoelastic materials, cyclic deformation