УДК 539.3 DOI: 10.20535/2409-7160.2023.XXIII.278070

Точний розв’язок геометрично нелінійної задачі для довгої тришарової циліндричної панелі овального перерізу

Є.А. Сторожук
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Анотація. *Дано постановку та отримано точний розв’язок геометрично нелінійної задачі для піддатливої на поперечний зсув довгої незамкненої тришарової циліндричної оболонки овального поперечного перерізу за дії рівномірного поверхневого навантаження. Основні рівняння записані згідно з геометрично нелінійною теорією пологих оболонок у квадратичному наближенні, в якій мають місце гіпотези Тимошенка для всього пакету шарів оболонки. Розв’язок задачі отримано в параметричній формі з величиною тангенціального зусилля в якості параметра. Для оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями одержано точні значення компонентів напружено-деформованого стану, визначено граничні значення узагальненого геометричного параметра, побудовано систему рівнянь для знаходження критичного навантаження. Як частинні випадки, з отриманого розв’язку випливають відповідні результати для моделі Кірхгофа–Лява, оболонки кругового перерізу та одношарової оболонки. Отримані результати можуть бути еталонними для наближених і чисельних методів.*
Ключові слова: *довга тришарова циліндрична оболонка; овальний поперечний переріз; геометрична нелінійність; поперечний зсув; рівномірний тиск; точний розв’язок.*

Вступ. Шаруваті пластини та оболонки широко застосовуються в авіа- та суднобудуванні, космічній техніці, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях промисловості. Застосування шаруватих конструкцій дозволяє забезпечити більш високу жорсткість та міцність порівняно з аналогічними одношаровими елементами конструкцій такої ж маси. Серед шаруватих елементів конструкцій значного поширення набули тришарові циліндричні оболонки.

Постановка задачі і основні співвідношення. Розглянемо незамкнену нескінченно довгу циліндричну оболонку овального поперечного перерізу, яка складається з трьох трансверсально-ізотропних шарів сталої товщини h_i $(i = 1, 2, 3)$ і навантажена рівномірним нормальним тиском інтенсивності q. Віднесемо серединну поверхню оболонки до криволінійної ортогональної системи координат (s, y), де s, y – довжини напрямної і твірної. Прямолінійну координату γ направимо по нормалі до серединної поверхні.

Поперечний переріз серединної поверхні оболонки має форму дуги овалу, кривизна якого змінюється за законом [1]:

$$k = \frac{1}{r} = k_0\left(1 - \xi\cos 2k_0 s\right); \quad -\delta \le s \le \delta, \tag{1}$$

де r – радіус кривизни поперечного перерізу; $k_0 = 1/r_0$; r_0 – радіус кола, довжина якого дорівнює довжині овалу; ξ – параметр, який є мірою відхилення овалу від кола і змінюється в межах: $-1 \le \xi \le 1$.

Для дослідження напружено-деформованого стану даного класу гнучких циліндричних оболонок скористаємося рівняннями варіанту геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні типу Тимошенка [1–3], в якому кінематичні та статистичні гіпотези застосовуються до всього пакету шарів оболонки [3]. У цьому випадку для компонентів деформації оболонки ε, ψ, μ маємо вирази:

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{ds}\right)^2; \quad \psi = \vartheta + \frac{dw}{ds}; \quad \mu = \frac{d\vartheta}{ds}, \tag{2}$$

де u, w – тангенціальне переміщення і прогин точок серединної поверхні оболонки; ϑ – кут повороту нормалі.

Зв'язок внутрішніх зусиль і моменту з компонентами деформації оболонки записуємо на основі закону Гука для трансверсально-ізотропних матеріалів у вигляді [3]:

$$N = D_N \varepsilon + D_K \mu; \quad Q = D_Q \psi; \quad M = D_K \varepsilon + D_M \mu. \tag{3}$$

У співвідношеннях (3) позначено: N, Q – тангенціальне і перерізуюче зусилля; M – згинальний момент; D_N, D_K, D_M, D_Q – характеристики жорсткості оболонки, які визначаються за формулами:

$$D_N = \sum_{i=1}^{3} \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2}; \quad D_K = \sum_{i=1}^{3} \frac{E_i(\gamma_{i+1}^2 - \gamma_i^2)}{2(1-\nu_i^2)}; \quad D_M = \sum_{i=1}^{3} \frac{E_i(\gamma_{i+1}^3 - \gamma_i^3)}{3(1-\nu_i^2)}; \quad D_Q = m\sum_{i=1}^{3} G_{s\gamma}^i h_i, \tag{4}$$

де $\gamma_i, \gamma_{i+1} \in [-h/2; h/2]$ – координати поверхонь i-го шару оболонки; $h = h_1 + h_2 + h_3$; $E_i, \nu_i, G_{s\gamma}^i$ – фізико-механічні характеристики матеріалу i-го шару; m – коефіцієнт, який залежить від характеру розподілу зсуву за товщиною.

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\frac{dN}{ds} = 0; \quad \frac{dQ}{ds} + N\frac{d^2 w}{ds^2} - kN - q = 0; \quad \frac{dM}{ds} - Q = 0. \tag{5}$$

При розв'язанні конкретних крайових задач до рівнянь рівноваги (5) потрібно приєднати відповідні граничні умови.

Метод розв'язку поставленої задачі. Розглянемо найбільш важливий із практичної точки зору випадок, коли поверхневе навантаження прикладене з боку опуклості оболонки. Тоді тангенціальне зусилля N є нерозтягуючим ($N \le 0$).

Інтегруючи перше рівняння системи (5), отримуємо, що

$$N = C_0 = const. \tag{6}$$

Введемо безрозмірні величини [1–4]:

$$\eta = \frac{s}{\delta}; \quad \tilde{w} = \frac{w}{k_0\delta^2}; \quad \tilde{u} = \frac{u}{k_0^2\delta^3}; \quad \tilde{\vartheta} = \frac{\vartheta}{k_0\delta}; \quad \tilde{k} = \frac{\delta^2 k_0}{h}; \quad \tilde{k}_0 = 2\delta k_0;$$

$$\tilde{q} = \frac{q\delta^2}{k_0 D_M^*}; \quad \beta = \frac{D_M^*}{D_Q\delta^2}; \quad \tilde{N} = \frac{N\delta^2}{D_M^*}; \quad \tilde{Q} = \frac{Q\delta}{D_M^* k_0}; \quad \tilde{M} = \frac{M}{D_M^* k_0}, \tag{7}$$

де $D_M^* = D_M - D_K^2 / D_N$.

З врахуванням (2)–(4), (6), (7) перепишемо рівняння системи (5) у вигляді:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\eta} + (1 - \xi\cos\tilde{k}_0\eta)\tilde{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{w}}{d\eta}\right)^2 = \frac{D_M^*\tilde{N}}{D_N h^2 \tilde{k}^2} - \frac{D_K}{D_N h\tilde{k}}\frac{d\tilde{\vartheta}}{d\eta}; \tag{8}$$

$$(1+\tilde{N}\beta)\frac{d^2\tilde{w}}{d\eta^2} + \frac{d\tilde{\vartheta}}{d\eta} = \tilde{N}\beta(1 - \xi\cos\tilde{k}_0\eta) + \beta\tilde{q};$$

$$\beta\frac{d^2\tilde{\vartheta}}{d\eta^2} - \tilde{\vartheta} - \frac{d\tilde{w}}{d\eta} = 0. \tag{9}$$

Приймемо, що поздовжні краї оболонки шарнірно закріплені. Тоді граничні умови на цих краях у безрозмірних величинах записуються наступним чином:

$$\tilde{w}(\pm 1)=0; \quad \left.\frac{d\tilde{\vartheta}}{d\eta}\right|_{\eta=\pm 1}=0; \quad \tilde{u}(\pm 1)=0. \tag{10}$$

Система (9) є системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно безрозмірних прогину $\tilde{w}$ і кута повороту $\tilde{\vartheta}$.

Використовуючи метод Ейлера, принцип суперпозиції й метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо загальний розв'язок системи (9) за умови $\lambda \neq \tilde{k}_0$:

$$\begin{aligned}\tilde{w}&=C_1+C_2\eta+C_3\cos\lambda\eta+C_4\sin\lambda\eta+0{,}5P\eta^2+A\cos\tilde{k}_0\eta;\\ \tilde{\vartheta}&=-C_2+\lambda(1+\tilde{N}\beta)(C_3\sin\lambda\eta-C_4\cos\lambda\eta)-P\eta+B\sin\tilde{k}_0\eta.\end{aligned} \tag{11}$$

Тут $\lambda^2=-\tilde{N}/(1+\beta\tilde{N})>0$; $P=1+\tilde{q}/\tilde{N}$; $A=(1+\beta\tilde{k}_0^2)B/\tilde{k}_0$; $B=\lambda^2\xi/\tilde{k}_0(\lambda^2-\tilde{k}_0^2)$; C_i $(i=\overline{1,4})$ – сталі інтегрування.

Розв'язок системи (9), який задовольняє граничним умовам (10), має вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{w}&=-\frac{(\tilde{N}A+\tilde{k}_0B)\cos\tilde{k}_0}{\tilde{N}}+\frac{P}{\tilde{N}}\left[1+\frac{\tilde{N}(\eta^2-1)}{2}-\frac{\cos\lambda\eta}{\cos\lambda}\right]+\frac{\tilde{k}_0B\cos\tilde{k}_0\cos\lambda\eta}{\tilde{N}\cos\lambda}+A\cos\tilde{k}_0\eta;\\ \tilde{\vartheta}&=-\frac{\tilde{k}_0B\cos\tilde{k}_0\sin\lambda\eta}{\lambda\cos\lambda}+\frac{P}{\lambda}\left(\frac{\sin\lambda\eta}{\cos\lambda}-\lambda\eta\right)+B\sin\tilde{k}_0\eta.\end{aligned} \tag{13}$$

Безрозмірні згинальний момент і перерізуюче зусилля обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}\tilde{M}&=-\frac{\tilde{k}_0B\cos\tilde{k}_0\cos\lambda\eta}{\cos\lambda}+P\left(\frac{\cos\lambda\eta}{\cos\lambda}-1\right)+\tilde{k}_0B\cos\tilde{k}_0\eta;\\ \tilde{Q}&=\frac{\lambda\tilde{k}_0B\cos\tilde{k}_0\sin\lambda\eta}{\cos\lambda}-\frac{\lambda P\sin\lambda\eta}{\cos\lambda}-\tilde{k}_0^2B\sin\tilde{k}_0\eta.\end{aligned} \tag{14}$$

Задовольняючи умову відсутності зближення між краями $\tilde{\Delta}=\int_{-1}^{1}\frac{d\tilde{u}}{d\eta}d\eta=0$, отримаємо залежність між параметрами навантаження й тангенціального зусилля у вигляді квадратного рівняння відносно P:

$$R_1P^2+R_2P+R_3=0. \tag{15}$$

Рівняння (15) має дійсні розв'язки при невід'ємних значеннях його дискримінанта: $D=\sqrt{R_2^2-4R_1R_3}=\tilde{D}\cos^2\lambda\geq 0$.

Залежності $\tilde{w}(\tilde{q}),\tilde{\vartheta}(\tilde{q}),\tilde{Q}(\tilde{q}),\tilde{M}(\tilde{q})$ при фіксованому значенні координати η отримуються в результаті виконання наступних кроків. Спочатку за допомогою рівняння (15) чисельно знаходимо залежність $\tilde{q}(\lambda)$. Далі з виразів для $\tilde{w},\tilde{\vartheta},\tilde{Q},\tilde{M}$ (13), (14), перебираючи λ і враховуючи зв'язок $\tilde{q}(\lambda)$, одержуємо залежності $\tilde{w}(\tilde{q}),\tilde{\vartheta}(\tilde{q}),\tilde{Q}(\tilde{q}),\tilde{M}(\tilde{q})$.

Отже, аналітичний (точний) розв'язок геометрично нелінійної крайової задачі (8)–(10) отримано в параметричній формі з величиною λ в якості параметра.

Побудований розв'язок дозволяє розглянути поведінку оболонки у всій області деформування – як докритичній, так і закритичній, і виконати аналіз напружено-деформованого стану залежно від геометричних і механічних параметрів, а також видів навантаження й контурних умов.

Також в роботі на основі побудованого точного розв'язку поставленої задачі одержані такі результати.

З умов $\tilde{D}\big|_{\lambda=\pi/2}=0$ і $\tilde{D}\big|_{\lambda=\pi}=0$ знайдені граничні значення $\tilde{k}_{\pi/2}$ і $\tilde{k}_{\pi}$ узагальненого геометричного параметра $\tilde{k}=\delta^2 k_0/h$, що розбивають область зміни $\tilde{k}$ на три проміжки [1, 4]: 1) $0<\tilde{k}<\tilde{k}_{\pi/2}$ (в цьому проміжку існує тільки одна стійка симетрична форма рівноваги оболонки, втрати стійкості немає); 2) $\tilde{k}_{\pi/2}\le\tilde{k}<\tilde{k}_{\pi}$ (в цьому діапазоні існують дві різні форми стійкої рівноваги оболонки, перехід між якими відбувається за рахунок хлопка); 3) $\tilde{k}\ge\tilde{k}_{\pi}$ (в цьому випадку можлива втрата стійкості оболонки за рахунок біфуркації з переходом до несиметричної форми рівноваги).

З використанням рівняння (15) і умови $\dfrac{d\tilde{q}}{d\lambda}=0$ побудована система рівнянь для знаходження верхнього і нижнього критичних значень навантаження, при досягненні яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка.

Зазначимо, що з наведених вище даних випливають відповідні результати для моделі Кірхгофа–Лява, оболонки кругового перерізу та одношарової оболонки.

Висновки

Отримані в роботі результати можуть бути використані в сучасній інженерній практиці при оцінці міцності, жорсткості та стійкості тришарових оболонкових елементів конструкцій кругового і некругового поперечного перерізу, а також можуть бути еталонними для наближених і чисельних методів.

Список літератури

1. E.A. Storozhuk, "Exact solution of geometrically nonlinear problem for the compliant on transverse shear oval cylindrical shell," (in Ukrainian), Prykl. Mekh., vol. 58, No. 6, pp. 39–59, 2022.
2. M.V. Marchuk, R.I. Tuchapskii, and V.S. Pakosh, "Investigation of deforming of flexible long shallow noncircular cylindrical panels with clamped longitudinal edges using the refined theory," (in Russian), Mekh. Mashin, Mekhan. Mater., vol. 33, No. 4, pp. 59–69, 2015.
3. J.L. Yang, Y. Zhang, and Z.M. Zhang, "Nonlinear stability analysis of infinitely long laminated cylindrical shallow shells including shear deformation under lateral pressure," Int. J. Mech. Scin., vol. 34, No. 5, pp. 345–354, 1992.
4. Ya.M. Grigorenko and L.V. Kharitonova, "To determination of critical values of the load under deformation of flexible non-circular cylindrical shells with rigidly fixed edges," Int. Appl. Mech., vol. 41, No. 11, pp. 1278–1287, 2005.

Exact solution of a geometrically nonlinear problem for a long three-layer cylindrical panel of oval section

E. Storozhuk

Abstract. *A statement is given and an exact solution of a geometrically nonlinear problem is given for a long open three-layer cylindrical shell of an oval cross-section susceptible to transverse shear under the action of a uniform surface load. The main equations are written according to the geometrically nonlinear theory of smooth shells in the quadratic approximation, in which Tymoshenko's hypotheses hold for the entire package of shell layers. The solution of the problem is obtained in a parametric form with the value of the tangential force as a parameter. For a shell with hinged longitudinal edges, the exact values of the components of the stress-strain state were obtained, the limit values of the generalized geometric parameter were determined, and a system of equations for finding the critical load was constructed. As partial cases, the obtained solution yields the corresponding results for the Kirchhoff–Leav model, the shell of a circular cross-section, and the single-layer shell. The obtained results can be a reference for approximate and numerical methods.*

Keywords: *long three-layer cylindrical shell; oval cross-section; geometric nonlinearity; transverse shear; uniform pressure; exact solution.*