УДК 539.3 DOI: 10.20535/2409-7160.2023.XXIII.279027

Модель нелінійного деформування шаруватих матеріалів

О.М. Шикула, Н.Б. Жукова
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Анотація: *Запропоновано модель нелінійного деформування шаруватого матеріалу з фізично нелінійними шарами. Шаруватий матеріал розглядається як двокомпонентний матеріал з випадковим розташуванням шарів. В основу покладені стохастичні диференційні рівняння фізично нелінійної теорії пружності Л. П. Хорошуна. Рішення задачі про напружено-деформівний стан та ефективні властивості композитного матеріалу будується за методом осереднення. Розроблено алгоритм визначення ефективних деформівних властивостей шаруватого матеріалу з фізично нелінійними шарами. Рішення нелінійних рівнянь, що враховують їх фізичну нелінійність, будується за ітераційним методом. Встановлено закон зв'язку між макронапруженнями і макродеформаціями в шаруватому матеріалі та залежності середніх деформацій і напружень в його шарах від макродеформацій. Побудовано криві деформування матеріалу для різних значень об'ємного вмісту його наповнювача. Вивчено залежність ефективних деформівних властивостей шаруватого матеріалу від об'ємного вмісту наповнювача. Досліджено вплив нелінійності шарів на деформування шаруватого композитного матеріалу. Встановлено, що нелінійність шарів суттєво впливає на ефективні деформівні властивості та напружено-деформований стан шаруватих матеріалів.*

Ключові слова: *шаруватий матеріал, нелінійність деформування шарів, ефективні деформативні властивості, напружено-деформований стан, вплив нелінійності.*

Вступ

При досить великому навантаженні багато композитних матеріалів деформуються нелінійно внаслідок фізичної нелінійності їх компонентів. Нелінійний характер залежностей між макродеформаціями і макронапруження характерний для композитів на основі металевої матриці, а також на основі полімерних матеріалів при високих температурах. Експериментальні дослідження показують [2], що за досить високих температур нелінійно деформуються також високомодульні матеріали типу органічного скла. На рис. 1 наведено графіки експериментальної залежності напруження від деформації для органічного скла за різних температур. Як бачимо при температурі 80°, залежність між напруженням і деформацією має параболічний характер. Тому актуальним є дослідження фізично нелінійного деформування шаруватих матеріалів при нелінійному деформуванні як наповнювача, так і зв'язуючого.

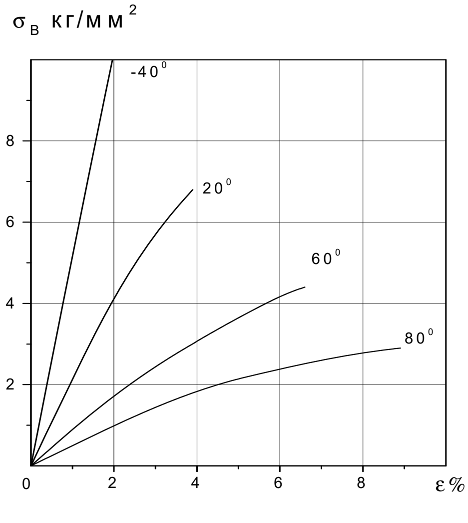

Рис. 1. Експериментальна залежність напруження від деформації для органічного скла при різних температурах

Мета дослідження

Метою даної роботи є побудова моделі та дослідження нелінійного деформування шаруватих матеріалів. Завданнями дослідження є побудова моделі нелінійного деформування шаруватих матеріалів, розробка алгоритму визначення напружено-деформованого стану та ефективних деформативних властивостей шаруватого матеріалу з фізично нелінійними шарами, а також дослідження залежності деформування шаруватого матеріалу від нелінійності деформування та об’ємного вмісту шарів. В основу покладено стохастичні диференціальні рівняння фізично нелінійної теорії пружності Л. П. Хорошун [2–5].

Матеріали та методи дослідження

Шаруватий матеріал стохастичної структури можна розглядати як мікронеоднорідний матеріал, фізико-механічні характеристики якого є функціями однієї координати. Нехай вісь x_3 направлена нормалі до шарів. В цьому випадку рівняння рівноваги спрощуються

$$\sigma_{i3,3} = 0, \tag{1}$$

звідки знаходимо

$$\sigma_{i3} = A_i, \qquad A_i = const. \tag{2}$$

Співвідношення Коші у цьому випадку мають вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = <\varepsilon_{ij}> + 1/2\,(u^0_{i,3}\delta_{j3} + u^0_{j,3}\delta_{i3}). \tag{3}$$

де флуктуації переміщень $u_i^0 = u_i - <\varepsilon_{ij}> x_j$. Підставляючи (3) та співвідношення пружності

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{pp}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (\lambda = K - \frac{2}{3}\mu) \tag{4}$$

в інтеграли рівнянь рівноваги (2), отримуємо алгебраїчні рівняння відносно похідних флуктуацій переміщень [3–6]

$$u^0_{i,3} = \frac{1}{\mu}A_i - 2<\varepsilon_{i3}>;$$

$$u^0_{3,3} = \frac{1}{\lambda+2\mu}A_3 - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}<\varepsilon_{kk}> - <\varepsilon_{33}> \qquad (i,k=1,2). \tag{5}$$

Осереднюючі (5), визначаємо постійні інтегрування

$$A_i = 2\left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle^{-1}<\varepsilon_{i3}>; \quad A_3 = \left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}\left(\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle<\varepsilon_{kk}> + <\varepsilon_{33}>\right) \qquad (i,k=1,2). \tag{6}$$

Тут позначено $<f> = c_1 f_1 + c_2 f_2$, де f_1, f_2 - значення параметра f відповідно наповнювача та зв’язуючого, а c_1, c_2 - їх об’ємний вміст.

На основі (3), (5), (6) знаходимо мікродеформації [3–6]

$$\varepsilon_{ij} = <\varepsilon_{ij}>; \qquad \varepsilon_{i3} = \frac{1}{\mu}\left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle^{-1}<\varepsilon_{i3}>;$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{\lambda+2\mu}\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}\left[\left(\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle-\lambda\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle\right)<\varepsilon_{kk}>+<\varepsilon_{33}>\right]\ (i,j,\ k=1,2). \qquad (7)$$

Підставляючи (7) в (4), отримуємо вирази для мікронапружень [3–6]

$$\sigma_{ij}=2\mu<\varepsilon_{ij}>+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}\left(\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle+2\mu\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle\right)<\varepsilon_{kk}>\delta_{ij}+$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}<\varepsilon_{33}>\delta_{ij};$$

$$\sigma_{i3}=2\left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle^{-1}<\varepsilon_{i3}>;\qquad \sigma_{33}=\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}\left(\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle<\varepsilon_{kk}>+<\varepsilon_{33}>\right)\ (i,j,\ k=1,2). \qquad (8)$$

Осереднюючі їх, знаходимо залежності між макронапруженнями та макродеформаціями

$$<\sigma_{ij}>=(\lambda_{11}^*-\lambda_{12}^*)<\varepsilon_{ij}>+(\lambda_{12}^*<\varepsilon_{kk}>+\lambda_{13}^*<\varepsilon_{33}>)\delta_{ij};$$

$$<\sigma_{33}>=\lambda_{13}^*<\varepsilon_{kk}>+\lambda_{33}^*<\varepsilon_{33}>;\qquad <\sigma_{i3}>=2\lambda_{44}^*<\varepsilon_{i3}>\qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2),$$

де ефективні пружні коефіцієнти визначаються за формулами [6]

$$\lambda_{11}^*=\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{2}+4\left\langle\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\right\rangle;$$

$$\lambda_{12}^*=\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{2}+2\left\langle\frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\right\rangle;$$

$$\lambda_{13}^*=\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle;\qquad \lambda_{33}^*=\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1};\qquad \lambda_{44}^*=\left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle^{-1}. \qquad (9)$$

Зазначимо, що в випадку фізичної нелінійності шарів у композиті пружні коефіцієнти цих шарів, а отже, і ефективні коефіцієнти (9) є функціями середніх в шарах деформацій $<\varepsilon_{ij}^{\nu}>\ \ (\nu=1,\ 2)$. Виразивши середні у шарах деформації через середні деформації у композиті, отримаємо ефективні коефіцієнти як функції середніх деформацій у композиті. Середні у шарах деформації $<\varepsilon_{ij}^{\nu}>\ (\nu=1,\ 2)$ пов’язані із середніми деформаціями у композиті співвідношеннями:

$$<\varepsilon_{ij}^{\nu}>=<\varepsilon_{ij}>;\qquad <\varepsilon_{i3}^{\nu}>=\frac{1}{\mu_\nu}\left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle^{-1}<\varepsilon_{i3}>;$$

$$<\varepsilon_{33}^{\nu}>=\frac{1}{\lambda_\nu+2\mu_\nu}\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}\left[\left(\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle-\lambda_\nu\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle\right)<\varepsilon_{kk}>+<\varepsilon_{33}>\right]\ (i,j,\ k=1,2). \qquad (10)$$

Підставивши вирази (9) у (10), отримаємо вирази для ефективних коефіцієнтів λ_{mn}^* як функцій середніх деформацій у композиті $<\varepsilon_{ij}>$. Для їх визначення скористуємося ітераційним методом.

Результати

Як конкретну задачу розглянемо дослідження нелінійного деформування шаруватого матеріалу, у якого модулі об’ємного стиску наповнювача та зв’язуючого постійні, а модулі зсуву задаються нелінійними діаграмами, що при малих деформаціях мають лінійні ділянки, яким відповідають модулі зсуву відповідно $\mu_1(0)$ і $\mu_2(0)$.

На рис. 2 наведено графіки залежностей макронапруження від макродеформації для шаруватого матеріалу при різних об’ємних концентраціях наповнювача. Як бачимо, фізична нелінійність шарів матеріалу істотно впливає на характер діаграм деформування для всіх значеннях об’ємного вмісту наповнювача. Криві залежностей мають параболічний характер.

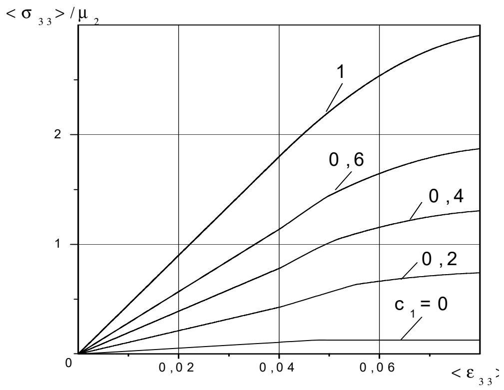

Рис. 2. Залежності макронапруження від макродеформації для шаруватого матеріалу при різних об’ємних концентраціях наповнювача

Висновки

Побудовано модель нелінійного деформування шаруватих композитних матеріалів, розроблено алгоритм визначення напружено-деформованого стану та ефективних деформативних властивостей шаруватого матеріалу з фізично нелінійними шарами, а також досліджено залежність деформування шаруватого матеріалу від нелінійності компонентів та об’ємного вмісту наповнювача. Встановлено, що фізична нелінійність шарів істотно впливає на характер діаграм деформування для всіх значеннях об’ємного вмісту наповнювача.

Список літератури

1. Wolf B.K., Romadin K.P. (1967). Aviation material science. Mechanical engineering, Moscow. (on Russian).
2. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2002). Nonlinear deformative properties of dispersion-reinforced materials. Mechanics of composite materials. 38, No. 4, 473–486.
3. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2008). Deformation of physically nonlinear stochastic composites. International Applied Mechanics. 44. No 12, 1325–1351.
4. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2012). Deformation and long-term damage of homogeneous and composite materials of stochastic structure. International Applied Mechanics. 48. No 1, 7–55.
5. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (1996). Nonlinear deformation of fiber-reinforced composite laminates with microscopic fractures in the binder. International Applied Mechanics. 32. No 11, 858–864.
6. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2002). Short-term damage micromechanics of laminated fibrous composites under thermal actions. International Applied Mechanics. 37. No 9, 1083–1093.

The model of nonlinear deformation of layered materials

E. Shikula, N. Zhukova

Abstract. *The model of nonlinear deformation of a layered material with physically nonlinear layers is proposed. The laminate is considered a two-component material with random layers. The basis is the stochastic differential equations of the physically nonlinear theory of elasticity by L.P. Khoroshun. The solution to the problem of the stress-strain state and effective properties of the composite material is constructed by the averaging method. An algorithm for determining the effective deformable properties of a layered material with physically nonlinear layers has been developed. The solution of nonlinear equations taking into account their physical nonlinearity is constructed by an iterative method. The law of the relationship between macrostresses and macrostrains in a layered material and the dependence of average strains and stresses in its layers on macrostrains has been established. Curves of material deformation are plotted for different values of the volumetric content of its filler. The dependence of the effective deformative properties of the laminated material on the volumetric content of the filler has been studied. The effect of nonlinearity of layers on the deformation of a layered composite material is investigated. It was found that the nonlinearity of the layers have significant influence on the effective deformative properties and the stress-strain state of laminated materials.*

Keywords: *laminated material, nonlinear deformation of layers, stress-strain state, efficient deformative properties, influence of nonlinearity.*